



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени Серго Орджоникидзе  
(МГРИ)**

---



**А. Д. Каринский**

**ТЕОРИЯ ПОЛЯ  
(ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В  
РАЗВЕДОЧНОЙ ГЕОФИЗИКЕ)**

Программа, методические указания и контрольные задания для  
студентов-заочников ЗРФ, ЗПИ

МОСКВА. 2020

Методические указания ориентированы на изучение студентами курса по учебнику [1] Л. М. Альпина, Д. С. Даева и А. Д. Каринского «Теория полей, применяемых в разведочной геофизике». Формулировка некоторых заданий в контрольных работах предполагает привлечение приведенных в этом пособии материалов и учебного пособия [5] А. Д. Каринского «Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Статические поля, стационарное электрическое поле». Методические указания и контрольные задания могут оказаться полезными для студентов не только заочной, но и дневной формы обучения.

#### **Учебные пособия и электронная версия учебника по "Теории поля" в интернет**

##### **1. Лекции по «Теории поля» («Теории полей, применяемых в разведочной геофизике»).**

Учебное пособие, 2014, 203 с.

[http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT\\_ID=2656](http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT_ID=2656) или

[http://magnetometry.ru/files/Karinskiy\\_lec\\_2014.pdf](http://magnetometry.ru/files/Karinskiy_lec_2014.pdf) или

<http://www.geokniga.org/books/6822>.

**2. Практикум «Теория полей, применяемых в разведочной геофизике».** Статические поля, стационарное электрическое поле. Учебное пособие, 2014, 105 с.

[http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT\\_ID=2657](http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT_ID=2657) или

[http://magnetometry.ru/files/Karinskiy\\_lab\\_2014.pdf](http://magnetometry.ru/files/Karinskiy_lab_2014.pdf) или

<http://www.geokniga.org/books/6823>.

*(В основном именно это учебное пособие может помочь студентам РФ и ЗРФ при выполнении курсовых проектов)*

#### **ЭЛЕКТРОННАЯ ВЕРСИЯ УЧЕБНИКА**

**3.** Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебник для ВУЗов. **Часть I.** "Введение". Глава первая "Поле", 2019, 104 с.

<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41710031> или

[http://magnetometry.ru/files/Alpin\\_uch\\_vol1\\_2019.pdf](http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol1_2019.pdf) или

[http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT\\_ID=5777](http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT_ID=5777)

**4.** Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебник для ВУЗов. **Часть II.** Глава вторая "Статическое поле в вакууме". Глава третья "Статическое поле в присутствии среды", 2020, 111 с.

<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42771398> или

[http://magnetometry.ru/files/Alpin\\_uch\\_vol2\\_2019.pdf](http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol2_2019.pdf).

**5.** Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебник для ВУЗов. **Часть III.** Глава четвертая "Стационарное электрическое поле". Глава пятая "Магнитное поле постоянного тока", 2020, 106 с.

<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42782333> или

[http://magnetometry.ru/files/Alpin\\_uch\\_vol3\\_2020.pdf](http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol3_2020.pdf).

**6.** Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебник для ВУЗов. **Часть IV.** Глава шестая "Переменное электромагнитное поле". Глава седьмая "Прямая задача теории переменного электромагнитного поля", 2020, 104 с.

<https://elibrary.ru/item.asp?id=43803479> или

[http://magnetometry.ru/files/Alpin\\_uch\\_vol4\\_2020.pdf](http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol4_2020.pdf).

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс «Теория поля» (ранее - «Теория полей, применяемых в разведочной геофизике») имеет целью ознакомить студентов с наиболее общими закономерностями этих полей, связями между причинами, порождающими поле, и характеризующими его величинами, основами построения теории полей. Курс является связующим звеном между общетеоретическими дисциплинами - математикой, физикой и специальными предметами - гравиразведкой, магниторазведкой, электроразведкой, сейморазведкой и ГИС. Изучение данного курса предшествует изучению теории отдельных методов геофизической разведки.

При изучении курса необходимо знание высшей математики и физики в объёме, обычном (*ранее*) для высших технических учебных заведений. Особую роль при этом играют понятия векторного анализа. Построение курса таково, что по мере изложения материала рассматриваемые поля усложняются (влияние среды, изменение поля со временем).

Самостоятельному изучению курса студентами - заочниками предшествуют "установочные лекции", посвященные некоторым изучаемым в курсе вопросам, а также знакомству с элементами применяемого математического аппарата. В процессе самостоятельного изучения курса при необходимости студенты - заочники могут письменно обратиться за консультацией к преподавателю, а студенты, проживающие в Москве, лично прийти на консультации, время которых может быть оговорено на "установочных лекциях".

В списке литературы приведено несколько учебников, но помещенные ниже методические указания, контрольные вопросы и контрольные задания предполагают работу студентов с учебником [1] и учебным пособием [5], электронные версии которых уже подготовлены "в свободном доступе".

Студенты должны выполнить контрольные работы №1, №2, №3, №4 или по теперешним временам - хотя бы что-то из этого, что "вдруг получится" (один из вариантов) и сдать экзамен. Результаты выполненных контрольных работ, конечно, учитываются на экзамене. Кроме того, программой (сокращённого в последние годы курса "Теория полей,...") для групп ЗРФ, в отличие от групп ЗПИ, предусмотрена подготовка и защита курсового проекта.

## ПРОГРАММА КУРСА

**Поле.** Скалярные и векторные величины, действия над ними. Физический и математический смысл понятия «поле». Скалярные и векторные поля. Напряжение, циркуляция, поток вектора. Пространственные производные. Формулы Стокса и Гаусса - Остроградского. Уравнения поля в дифференциальной, интегральной и поверхностной формах. Потенциальные и соленоидальные поля. Телесный угол. Угол видимости. Прямая и обратная задачи теории поля. Системы координат.

**Статическое поле в вакууме.** Массы (заряды): объёмные, точечные, линейные, поверхностные. Закон Кулона - Ньютона. Напряжённость поля. Поле заданных масс как сумма полей отдельных источников. Дифференциальные уравнения статического поля, интегральная и поверхностная форма уравнений поля. Потенциал. Уравнение Пуассона - Лапласа. Поле точечного источника,

диполя, простого и двойного слоя. Нейтральная совокупность масс, квадруполь. Непрерывность поля и её нарушение. Особые поверхности и точки поля. Решение прямой задачи теории статического поля в вакууме. Теорема единственности решения прямой задачи.

**Статическое поле в присутствии среды.** Среда. Параметры среды. Модели среды: однородная, кусочно-однородная, градиентная, изотропная, анизотропная, 1D, 2D, 3D. Проводник в электростатическом поле. Векторы поляризации и намагничённости. Поле, создаваемое поляризованной средой. Связанные зависимые и независимые заряды (массы). Полные массы. Векторы электрической и магнитной индукции. Диэлектрические и магнитные восприимчивости и проницаемости. Система уравнений статического поля в поляризуемой (намагничиваемой) среде.

**Стационарное электрическое поле.** Электрический ток. Вектор плотности тока. Необъёмные токи. Закон Ома в дифференциальной форме. Уравнение непрерывности электрического тока. Постоянный ток. Система уравнений стационарного электрического поля. Потенциал. Уравнение потенциала. Стороннее поле. Электродвижущая сила. Контактная ЭДС. Источники стационарного электрического поля. Поле у поверхности раздела двух сред с разной удельной электропроводностью. Токовые электроды.

**Магнитное поле постоянного электрического тока.** Магнитное поле электрического тока при отсутствии магнитной среды. Закон Био-Савара-Лапласа. Поле линейных и объёмных токов. Векторный потенциал. Система уравнений поля при отсутствии магнитной среды. Скалярный потенциал магнитного поля постоянного электрического тока. Магнитный диполь. Уравнения магнитного поля постоянного тока в присутствии магнитной среды.

**Переменное электромагнитное поле.** Система уравнений квазипостоянного электромагнитного поля. Электромагнитная индукция, II-е уравнение Максвелла. Ток смещения, I-е уравнение Максвелла. Система уравнений электродинамики. Уравнение баланса электромагнитной энергии. Поле в непроводящей среде. Волновые уравнения. Поле в проводящей среде. Телеграфные уравнения. Квазистационарное поле. Уравнения теплопроводности - диффузии. Гармонически меняющееся электромагнитное поле. Скалярное гармонически меняющееся поле, комплексная запись. Векторное гармонически меняющееся поле и его комплексная запись. Система уравнений поля. Уравнение Гельмгольца. Волновое число. Плоская гармоническая электромагнитная волна, её характеристики. Поперечность электромагнитной волны. Импеданс.

### Введение

В курсе «Теория полей, применяемых в разведочной геофизике» широко привлекается понята векторного анализа. Поэтому перед работой над учебником по курсу следует, в случае необходимости, восстановить в памяти аппарат векторной алгебры и векторного анализа. Дополнительные пояснения к основным понятиям векторного анализа приводятся в главе первой учебника [1]. При изучении курса полезно выработать привычку представлять себе заданное аналитически поле в той или иной наглядной форме - в виде векторных линий, уровенных поверхностей, либо как совокупность значений (скалярных,

векторных) во множестве точек пространства.

Одно из основных затруднений, встречающихся при изучении курса, обусловлено переходом от преимущественно описательного характера изложения в курсе физики к более абстрактному характеру материала, даваемого в курсе «Теория полей,...». Для студентов дневного и вечернего отделений эту проблему удастся смягчить на лекциях, где приводится значительное число физических и геофизических иллюстраций к рассматриваемому материалу. При возникновении такой проблемы у студентов - заочников им рекомендуется обращаться в процессе изучения курса к соответствующим разделам учебников по общему курсу физики.

Главы в учебнике [1] делятся на параграфы, а параграфы - на разделы (пункты), пронумерованные римскими цифрами. Значительную помощь при изучении курса и выполнении контрольных работ может оказать предметный указатель, имеющийся в учебнике на страницах 403 - 405. В предметном указателе понятия расположены в алфавитном порядке, причем у тех из них, которые определяются несколькими словами, на первом месте стоит существительное (подлежащее).

В [1] формулы представлены применительно к единицам СИ. При необходимости привести выражения для электрического, магнитного и электромагнитного полей к виду, соответствующему системе СГС, можно воспользоваться таблицей подстановок, которая дана в [1] в приложении.

В первой главе учебника [1] и в разделе "Введение" электронной версии учебника [1, а] в основном рассматривается тот математический аппарат, который применяется в следующих главах. Приступая к проработке курса, эту главу можно лишь просмотреть и ознакомиться с расположением материала. В дальнейшем к ней следует обращаться по мере необходимости.

Студентам, не очень уверенно ориентирующимся в математическом аппарате, применяемом в курсе, можно рекомендовать «итерационный» подход при работе с учебником. В первый раз следует прочитать учебник, не обращая внимания на формулы, и познакомиться с основными понятиями, идеями, терминологией, порядком изложения материала. При втором чтении можно опускать математические доказательства, но стараться осмыслить основные формулы, к которым относятся запись физических законов, уравнения полей в различных формах, уравнения связи. При этом весьма полезно составить для каждой главы схему приводимых в ней формул, ядром которой должна явиться система уравнений поля (в дифференциальной, интегральной и поверхностной формах). На заключительном этапе работы с учебником основное внимание должно быть удалено разбору математических доказательств при получении тех или иных уравнений.

Обратим внимание на некоторые обозначения, применённые в книге [1].

Векторы, в отличие от прочих величин, обозначены «полужирными» прямыми буквами, например **M**, **f**, **E**, **H**.

Для линий (контуров), поверхностей (площадей) и областей пространства (объемов) приняты обозначения  $l$ ,  $S$ ,  $V$  соответственно, а для их элементов-  $dl$ ,  $dS$ ,  $dV$ . Ориентированный элементарный отрезок  $dl$  обозначается вектором **dl**, а ориентированная элементарная площадка  $dS$  - вектором **dS**.

Выражения вида  $\int_l f dl$ ,  $\oint_{l[S]} f dl$  обозначают криволинейный интеграл по

линии  $l$ ; во втором выражении указано, что линия  $l$  - замкнута и ограничивает поверхность  $S$ . Аналогично выражения  $\int_S f dS$ ,  $\oint_{S[V]} f dS$  определяет интегралы по

поверхности  $S$ , во втором случае - замкнутой и ограничивающей область пространства  $V$ .

Поверхностные производные записаны с заглавной буквы, например  $\text{Div } \mathbf{M}$ ,  $\text{Rot } \mathbf{M}$  (в отличие от пространственных производных, которые обозначены  $\text{div } \mathbf{M}$ ,  $\text{rot } \mathbf{M}$ ).

В ряде случаев пространственные производные записаны с дополнительным индексом, например  $\text{div}^a \mathbf{M} = \left( \nabla^a \mathbf{M} \right)$ ,  $\text{grad}^q T = \nabla^q T$ . Это связано с тем, что поле, зависящее от расстояния  $L_{qa}$  между точками  $q$  и  $a$ , является функцией минимум двух переменных -  $q$  и  $a$ . Пространственные производные такого поля зависят от того, какая из этих точек считается аргументом, что и отмечено индексом. При отсутствии такого индекса подразумевается, что аргументом является точка наблюдения ( $a$ ).

В изданном в 1985-ом году учебнике [1] производные по времени  $t$  обозначены точкой над дифференцируемой величиной, например  $\frac{\partial \delta}{\partial t} = \dot{\delta}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \dot{\mathbf{D}}$ . В случае постоянных полей (величин, функций) эти производные, разумеется, равны нулю. Аналогично вторые производные по

времени обозначены двумя точками, например  $\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \ddot{\mathbf{H}}$ . Опыт показал, что

студенты очень часто "не замечают" того, что таким способом обозначены производные по времени. Поэтому в электронной версии учебника [1] для таких производных применены "стандартные" обозначения":  $\frac{d\dots}{dt}$  и  $\frac{d^2\dots}{dt^2}$  - для

функций аргумента  $t$  и  $\frac{\partial\dots}{\partial t}$  и  $\frac{\partial^2\dots}{\partial t^2}$  - для частных производных по времени.

В главах 6, 7, 9 записанные в комплексной форме гармонически меняющиеся поля (величины), а также входящие в выражения для них не зависящие от времени комплексные множители (например, комплексные амплитуды скаляров) отмечены «галочками»:  $\overset{v}{\beta}$ ,  $\overset{v}{\mathbf{N}}$ ,  $\overset{v}{\beta}_0$ ,  $\overset{v}{\mathbf{N}}_0$ .

В конце главы 2 и в главе 3 ряд формул приведен совместно для электростатики и магнитостатики. Эти формулы (или выражения), относящиеся к полям разной физической природы, разделены знаком  $\nabla$  (или).

Из-за разнообразия полей, рассматриваемых в курсе, а также необходимости, по возможности, применять традиционные обозначения, принятые для тех или иных величин в электродинамике, механике сплошной среды, а также в отдельных методах геофизической разведки, некоторые символы обозначают в учебнике [1] разные величины. Приведем список основных обозначений и соответствующих им величин.

В каждой из четырёх подготовленных к настоящему времени частей электронной версии учебника [1] приведен более детальный список таких обозначений к соответствующей части.

$a$  - точка наблюдения, в главах 6, 7 - фазовая постоянная;

$\mathbf{A}$  - векторный потенциал магнитного поля постоянного тока, либо электродинамический потенциал электрического типа;

$A^*$  - векторный электродинамический потенциал магнитного типа;  
 $b$  - коэффициент затухания;  
 $B$  - вектор магнитной индукции;  
 $c$  - электродинамическая постоянная (скорость света в вакууме);  
 $D$  - вектор электрического смещения (индукции);  
 $e$  - электрический заряд;  
 $E$  - напряжённость электрического поля;  
 $\mathcal{E}$  - напряжение векторного поля;  
 $f$  - частота колебаний;  
 $f$  - в главе 2 - напряжённость статического поля;  
 $F$  - сила;  
 $h$  - коэффициент Ламэ, высота, толщина;  
 $H$  - напряжённость магнитного поля;  
 $i = \sqrt{-1}$  - мнимая единица;  
 $\mathbf{i}$  - поверхностная плотность тока;  
 $I$  - электрический ток, эмиссия электрода;  
 $\mathbf{j}$  - вектор (объёмной) плотности тока;  
 $\mathbf{J}$  - вектор намагничённости (намагниченности);  
 $k$  - в главах 6, 7, 9 - волновое число;  
 $l$  - линия, направление, контур, длина;  
 $L$  - расстояние;  
 $L$  - радиус-вектор;  
 $m$  - масса;  
 $M$  - магнитный момент, в главе I - векторное поле;  
 $n$  - нормаль;  
 $\mathbf{n}=\mathbf{1}_n$  - единичная нормаль;  
 $p$  - момент диполя;  
 $P$  - мощность сторонних сил;  
 $P$  - вектор поляризации;  
 $q$  - точка в источнике (возбудителе) поля;  
 $Q$  - мощность, переходящая в тепло;  
 $r$  - цилиндрическая координата;  
 $R$  - сферическая координата, сопротивление;  
 $S$  - поверхность, площадь;  
 $t$  - время, в индексах - тангенциальная компонента вектора;  
 $T$  - период, в главе I - скалярное поле;  
 $U$  - (скалярный) потенциал;  
 $v$  - скорость с абсолютной величиной  $v$ ;  
 $V$  - область пространства, объём;  
 $W$  - энергия;  
 $x, y, z$  - декартовы координаты;  
 $X, Y, Z$  - оси координат;  
 $Z$  - импеданс (волновое сопротивление), либо ось  $Z$ ;  
 $\Gamma$  - напряжённость гравитационного поля;

- $\mathbf{P}$  ( $\mathbf{P}^*$ ) - вектор Герца электрического (магнитного) типа;  
 $\mathbf{U}$  - вектор Умова - Пойнтинга;  
 $\alpha$  (альфа) - в главах 6, 7 - отношение  $\omega \varepsilon_a / \gamma$ ;  
 $\gamma$  (гамма) - в главах 4 - 7 - удельная электропроводность;  
 $\delta$  (дельта) - объёмная плотность масс, зарядов, в главах 6, 7 - глубина проникновения;  
 $\varepsilon$  (эпсилон) - в главах 3 - 7 - диэлектрическая проницаемость;  
 $\varepsilon_0$  - электрическая постоянная;  
 $\varepsilon_a = \varepsilon \varepsilon_0$  - абсолютная диэлектрическая проницаемость;  
 $\eta$  (эта) - поверхностная плотность дипольных моментов;  
 $\theta$  (тета) - сферическая координата;  
 $\varkappa$  (каппа) - магнитная восприимчивость;  
 $\lambda$  (лямбда) - линейная плотность масс, в главе 6 - длина волны;  
 $\Lambda$  (лямбда прописная) - в главах 3, 4 - параметр среды ( $\varepsilon, \mu, \gamma$ );  
 $\mu$  (мю) в главах 3 - 7 - магнитная проницаемость;  
 $\mu_0$  - магнитная постоянная;  
 $\mu_a = \mu \mu_0$  - абсолютная магнитная проницаемость;  
 $\nu$  (ню) - множитель в законе Кулона-Ньютона,;  
 $\xi$  (кси) - координата;  
 $\pi$  (пи)  $\approx 3.14159265\dots$  .  
 $\rho$  (ро) - в главах 4 - 7 - удельное электрическое сопротивление;  
 $\sigma$  (сигма) - поверхностная плотность масс, зарядов;  
 $\tau$  (тау) - в главе 6 - время релаксации, в индексах - обозначение полной тангенциальной компоненты вектора;  
 $\varphi$  (фи) - цилиндрическая или сферическая (азимутальная) координата;  
 $\chi$  (хи) - диэлектрическая восприимчивость;  
 $\Psi$  (пси) - поток вектора;  
 $\omega$  (омега) - угол видимости, в главах 6, 7, 9 - круговая частота;  
 $\Omega$  (омега прописная) - телесный угол.

При первоначальном изучении учебника можно ориентироваться на программу курса, приведенную выше, и опускать те разделы, которые не указаны непосредственно в программе курса. По мере рассмотрения отдельных глав учебника рекомендуется проводить самоконтроль, отвечая на помещенные ниже контрольные вопросы. При трудностях с ответами на эти вопросы целесообразно обратиться к соответствующим разделам учебника, воспользовавшись оглавлением и предметным указателем.

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Контрольные вопросы приведены по главам учебника [1].

#### К главе первой

1. Дайте определение понятия «поле».
2. Чем характеризуют скалярное и векторное поля? Приведите примеры таких

полей.

3. Какие способы применяют для наглядного (графического) представления скалярного поля  $T$  и векторного поля  $\mathbf{M}$ ?
4. При каких условиях поля  $T$  и  $\mathbf{M}$  непрерывны в точке  $a$ ?
5. Какие точки, линии и поверхности называют особыми?
6. Как математически определить напряжение векторного поля  $\mathbf{M}$  между точками 1 и 2?
7. Что называют циркуляцией и (скалярным) потоком вектора?
8. С помощью векторных линий  $l_M$  изобразите поля  $\mathbf{M}$ : а) с ненулевой циркуляцией по некоторым контурам; б) с положительным- и в) с отрицательным потоком вектора  $\mathbf{M}$  через замкнутую поверхность.
9. Приведите Формулы, определяющие производную  $\operatorname{div} \mathbf{M}$  и скалярную компоненту вектора  $\operatorname{rot} \mathbf{M}$  через поток и циркуляцию.
10. Чему равны поверхностные производные  $\operatorname{Div} \mathbf{M}$ ,  $\operatorname{Rot} \mathbf{M}$  при ограниченных значениях  $\mathbf{M}$  на особой поверхности?
11. Приведите примеры вторых производных полей  $\mathbf{M}$  и  $T$ . Какие из них тождественно равны нулю?
12. При каких условиях векторное поле называется: а) потенциальным; б) чисто вихревым; в) вихревым? Какими могут быть векторные линии  $l_M$  потенциального и чисто вихревого полей?
13. Какие задачи в теории поля называют прямыми и обратными?
14. Что такое телесный угол и угол видимости поверхности? Как они связаны между собой?
15. Какие значения может принимать угол видимости: а) замкнутой поверхности; б) (неограниченной) плоскости?
16. Чему равны градиенты  $\nabla^a L_{qa}$  и  $\nabla^q L_{qa}$  расстояния  $L_{qa}$  между точками  $a$  и  $q$ , а также градиенты величины  $1/L_{qa}$ ?
17. Что требуется определить, чтобы можно было считать заданной: а) декартову -; б) цилиндрическую -; в) сферическую систему координат?
18. Каковы координатные поверхности и линии в этих системах координат и как направлены орты? Что такое правая прямоугольная (ортогональная) система координат?
19. Что такое зеркальная (чётная и нечётная), цилиндрическая, сферическая симметрия поля - скалярного, векторного?
20. Какие упрощения возникают при определении симметричных полей в системах координат при соответствующем выборе системы координат?

### К главе второй

1. Определите понятия: объёмная, поверхностная, линейная, точечная масса. Чем характеризуют эти массы?
2. Как записать закон Кулона - Ньютона (в векторной форме) для случая взаимодействия двух точечных масс: а) гравитационных; б) электрических (зарядов); в) магнитных (точечных полюсов)?
3. Приведите выражение для напряжённости статического поля  $\mathbf{f}$ , создаваемого различными массами (точечными, объёмными и т. д.).
4. Как перейти от поля  $\mathbf{f}$  к напряжёностям гравитационного, электрического,

магнитного поля? Каков физический смысл этих полей?

5. Какой системе уравнений в интегральной форме удовлетворяет статическое поле  $\mathbf{f}$ , и какие свойства поля  $\mathbf{f}$  из этого следуют?
6. Как из этих уравнений можно получить уравнения поля  $\mathbf{f}$  в дифференциальной и поверхностной формах?
7. Как можно определить вектор  $\mathbf{f}$  и его компоненты, если известен потенциал  $U$  этого поля, и как найти  $U$ , зная  $\mathbf{f}$ ? Почему при заданном поле  $\mathbf{f}$  потенциал  $U$  определён не однозначно?
8. Что такое эквипотенциальные поверхности, линии, области пространства? Как направлено поле  $\mathbf{f}$  на эквипотенциальной поверхности, и каким может быть поле  $\mathbf{f}$  в эквипотенциальной области?
9. Запишите выражение для потенциала  $U$  поля  $\mathbf{f}$ , создаваемого совокупностью разных масс (точечных объёмных и т. д.).
10. В каких областях пространства уравнение Пуассона для потенциала  $U$  вырождается в уравнение Лапласа? Какая функция (поле) называется гармонической и какими свойствами она обладает?
11. Какие выражения определяют поле  $\mathbf{f}$  и потенциал  $U$  неограниченной однородной прямолинейной массы (прямой)? Какие массы создают поле с «логарифмическим» потенциалом?
12. Какое выражение определяет нормальную к плоскости компоненту поля  $\mathbf{f}$ , источником которого является поверхностная масса в виде простого слоя, расположенная на участке этой плоскости?
13. Какой источник поля называется диполем? Сравните поле диполя с полем точечной массы (заряда).
14. Что называется двойным слоем и чем характеризуют такой источник поля? Какое выражение определяет потенциал  $U$  поля  $\mathbf{f}$  двойного слоя (в частности - однородного двойного слоя)?
15. Приведите примеры точечных, линейных и поверхностных источников поля  $\mathbf{f}$  с суммарной массой, равной нулю (нейтральная совокупность масс). Что такое квадруполь?
16. В каких местах поле  $\mathbf{f}$  принимает неограниченные значения?
17. Как меняются нормальная  $f_n$  и тангенциальная  $f_t$  компоненты поля  $\mathbf{f}$ , а также его потенциал  $U$  при переходе точки наблюдения через особую поверхность, на которой имеется: а) простей слой; б) двойной слой?
18. Какие условия обеспечивают единственность решения прямой задачи теории статического поля? Что может "включать" краевая задача?

### К главе третьей

1. Определите понятие «среда». Что такое среда: однородная, кусочно-однородная, градиентная, изотропная, анизотропная?
2. Приведите примеры 1D, 2D, 3D - моделей среды.
3. Что называют векторами поляризации  $\mathbf{P}$  и намагничённости  $\mathbf{J}$ ?
4. Как выразить потенциал  $U$  поля, создаваемого поляризованной средой, через  $\text{div}\mathbf{P}$  и  $\text{Div}\mathbf{P}$ ? Каким формулам для потенциала и поля, создаваемого массами, идентичны эти выражения?
4. Что такое массы (заряды): свободные, связанные, временные, постоянные, зависимые, независимые? Какие из них всегда равны нулю, если речь идёт об

источниках магнитостатического поля?

5. Как связаны проницаемости  $\epsilon$ ,  $\mu$  с восприимчивостями  $\chi$ ,  $\mathfrak{K}$ , а также векторы индукции  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  с напряжённостями  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  (если исключить из рассмотрения среду с постоянной электрической поляризацией и неидеализированные ферромагнетики)?
6. Чем удобнее уравнения (3.16) (при анализе или расчёте полей) по сравнению с уравнениями (3.14)?
7. Источниками каких полей являются: а) полные электрические заряды, б) свободные электрические заряды, в) полные «магнитные массы», г) постоянные «магнитные массы»?
8. Запишите системы уравнений электростатического и магнитостатического полей в присутствии среды в дифференциальной и интегральной формах. Какие особенности полей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  следуют из этих уравнений?
9. При каких условиях потенциал: а) электростатического поля, б) магнитостатического поля в среде является гармонической функцией (см. (3.31) в [1]).
10. Приведите рисунок, аналогичный рис. 31 в [1] (где  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ ) для векторов магнитного поля, заменив  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  на  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , для случая, когда  $\mu_1 < \mu_2$ .
11. Где и при каких условиях существуют объёмные и поверхностные зависимые источники статического поля в поляризующейся (намагничивающейся) среде? Что такое «коэффициент контрастности границы»?
12. Какими, могут быть электростатическое поле  $\mathbf{E}$  и его потенциал  $U$  внутри проводника, а также  $U$  и компоненты  $E_t$ ,  $E_n$  поля  $\mathbf{E}$  на поверхности  $S$  проводника, если на  $S$  нет двойного слоя?
13. Поясните, почему замкнутый слой проводника «экранирует» ограниченную им область от внешних электростатических полей, но не «экранирует» внешнюю область от поля зарядов, расположенных в области, ограниченной таким «экраном».
14. Что можно полагать заданным (известным) при постановке и решении прямой задачи статического поля в присутствии среды? Какой вид имеют условия сопряжения на поверхности раздела (границе): а) диэлектриков; б) магнетиков?

#### К главе четвёртой

1. Чем определяются направление и абсолютная величина вектора плотности тока  $\mathbf{j}$ ? Что называют токовыми линиями  $l_j$ ?
2. Какими величинами характеризуют линейные и поверхностные токи?
3. Какое выражение называют законом Ома в дифференциальной форме?
4. Запишите (для переменного тока) уравнения непрерывности электрического тока в интегральной, дифференциальной и поверхностной формах. Какой вид принимают эти уравнения в случае постоянного тока?
5. Почему из системы уравнений стационарного поля  $\mathbf{E}$ :  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ ,  $\text{div } \mathbf{j} = 0$  следует, что закон Ома в дифференциальной форме не может быть справедлив во всем пространстве? Каким уравнением надо заменить этот закон в общем случае?
6. В какой области пространства, и при каком условии потенциал

- стационарного электрического поля удовлетворяет уравнению Лапласа (является гармонической функцией)?
7. При каких условиях выражение (4.25) в учебнике [1] переходит в формулу (4.27) для сопротивления участка цепи?
  9. Как (математически) определяют понятие «электродвижущая сила» (э. д. с.)? Почему двойные электрические слои в проводящей среде могут существовать только на тех поверхностях, на которых действуют контактные э. д. с.?
  10. Поясните, почему постоянное электрическое поле в проводнике могут создавать только те заряды, которые расположены внутри проводника или на его поверхности. Где и при каких условиях существуют эти заряды: а) объёмные, б) поверхностные?
  11. Если в первичном однородном поле  $\mathbf{E}^{\text{ПРВ}}$ , заданном в среде с удельной электропроводностью  $\gamma=\gamma_2$  находится объект с  $\gamma=\gamma_1$ , то каким будет (в общих чертах – по знаку) характер распределения зарядов на поверхности этого объекта в зависимости от соотношения  $\gamma_2/\gamma_1$ ? Приблизительно изобразите векторные линии вторичного поля  $\mathbf{E}^{\text{ВТР}}$ , создаваемого этими зарядами.
  12. Какие компоненты векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{j}$  непрерывны на поверхности раздела (границе) в проводящей среде, на которой нет необъёмных токов и контактной э. д. с.? Каковы особенности стационарного поля  $\mathbf{E}$  у границы с: а) изолятором; б) идеальным проводником? Что называют продольной проводимостью и поперечным сопротивлением слоя (пласта)?
  13. В результате каких явлений может существовать стационарное поле  $\mathbf{E}$  в земле?
  14. Что такое эмиссия (питающего) электрода и чему равен его заряд, если окружающая электрод среда - однородна? Приведите выражение для потенциала  $U$  поля  $\mathbf{E}$  точечного электрода в безграничной однородной (по удельному электрическому сопротивлению  $\rho=1/\gamma$ ) среде.
  15. Что можно полагать заданным при постановке и решении прямой задачи теории стационарного электрического поля и какой вид имеют условия сопряжения на особой поверхности  $S$ : а) в общем случае, б) если  $S$  - поверхность раздела, расположенная во внешней части цепи электрического тока?

### К главе пятой

1. От чего зависит сила, которая действует на контур  $l$  линейного тока  $I$ ?
2. Напишите формулы, определяющие магнитное поле линейных, объёмных и поверхностных токов в немагнитной среде. Какие выражения определяют векторный потенциал  $\mathbf{A}$  этого поля?
3. Пользуясь выражениями для магнитного поля  $\mathbf{B}$  и его потенциала  $\mathbf{A}$ , поясните, как направлены векторы  $d\mathbf{B}$  и  $d\mathbf{A}$  в точках плоскости  $S$ , если магнитное поле создаёт элемент  $dl$  линейного тока  $I$ , лежащий на этой плоскости.
4. Какой системе уравнений (в дифференциальной и интегральной формах) удовлетворяет магнитное поле  $\mathbf{B}$  электрического тока в немагнитной среде и какие (геометрические) особенности поля  $\mathbf{B}$  из этого следуют? Какое равенство называется законом полного тока, и для каких токов применим этот закон?

5. В каких областях пространства для магнитного поля постоянного тока можно ввести скалярный потенциал  $U$ ?
6. Какое выражение определяет потенциал  $U$  стационарного магнитного поля, создаваемого замкнутым линейным током? Потенциал магнитоэстатического поля какого источника определяет математически идентичное выражение?
7. Какие формулы определяют магнитный момент замкнутого контура линейного тока - в общем случае и для плоского контура?
8. Какой контур линейного тока и при каких условиях можно назвать магнитным диполем? В чём отличие векторных линий  $l_B$  магнитного поля  $\mathbf{B}$ , создаваемого таким током, от векторных линий  $l_E$  поля  $\mathbf{E}$  электрического диполя?
9. Чем удобнее система уравнений (5.42) в учебнике [1] (при анализе или расчёте магнитного поля токов в присутствии магнитной среды) по сравнению с системой уравнений (5.40)?
10. Чем отличается магнитное поле  $(\mathbf{B}, \mathbf{H})$  токов в безграничной однородной магнитной среде (в отсутствие постоянных магнитов) от поля таких же токов в немагнитной среде?

### К главе шестой

1. Какие явления, согласно уравнениям Максвелла, являются причиной возникновения вихревого поля: а) магнитного  $\mathbf{H}$ , б) электрического  $\mathbf{E}$ ?
2. Что означают термины: а) эллиптически-поляризованное поле, б) линейно-поляризованное поле? При какой поляризации производная вектора по времени коллинеарна вектору?
3. Какие изменения (упрощения) можно внести в систему уравнений электродинамики (6.12) в учебнике [1] в случаях, если: а) среда - диэлектрик, б) выполняются условия квазистационарности, в) поле - квазипостоянное или постоянное, г) поле - гармонически меняющееся (при применении комплексной записи)?
4. За счёт каких трёх явлений, согласно уравнению баланса электромагнитной энергии, может меняться со временем электромагнитная энергия в области  $V$ ? Какой вид примет это уравнение: а) для стационарного тока во внутренней и внешней частях токовой цепи, б) в непроводящей среде?
5. Что характеризует направление и абсолютная величина вектора Умова - Пойнтинга? Как может быть направлен этот вектор, если векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  лежат на некоторой плоскости  $S$ ?
6. Что произойдет с электрическим зарядом, попавшим в однородную проводящую среду (при отсутствии там стороннего поля)? Что называется временем релаксации  $\tau$  и как оно связано с электрическими параметрами среды?
7. В каком случае векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют телеграфному уравнению? При каких условиях вместо телеграфного уравнения для этих векторов справедливо: а) волновое уравнение, б) уравнение теплопроводности-диффузии?
8. Каковы решения волновых уравнений для декартовых компонент векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , которые зависят от времени и одной декартовой координаты (уравнений струны)? Какой процесс описывают эти решения?

9. Какова скорость распространения электромагнитного поля в изоляторе и, в частности, в вакууме? Как связаны между собой электрическая ( $\epsilon_0$ ), магнитная ( $\mu_0$ ) и электродинамическая ( $c$ ) постоянные?
10. Какие условия должны выполняться для того, чтобы электромагнитное поле можно было считать квазистационарным? Какое неравенство соответствует первому условию квазистационарности в случае гармонически меняющегося поля?
11. Как можно ввести электродинамические потенциалы  $\mathbf{A}$ ,  $U$  на основе уравнений:  $\operatorname{div} \mathbf{B}=0$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\dot{\mathbf{B}}$ ? Как называют уравнения, ограничивающие многозначность потенциалов  $\mathbf{A}$ ,  $U$ ?
12. Чем отличается решение уравнения Даламбера для электродинамического потенциала  $\mathbf{A}$  от решения уравнения Пуассона для векторного потенциала  $\mathbf{A}$  магнитного поля постоянного тока?
13. Какими выражениями можно определить гармонически меняющиеся скалярное и векторное поле (при обычной и комплексной записи)? Какую поляризацию может иметь гармонически меняющееся векторное поле?
14. При каких условиях векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  электромагнитного поля удовлетворяют уравнениям Гельмгольца? От каких величин зависит волновое число: *а)* в общем случае, *б)* в изоляторе, *в)* при выполнении условий квазистационарности?
15. Какой вид имеют решения уравнения Гельмгольца для декартовых компонент векторов электромагнитного поля, зависящих от одной декартовой координаты? Как различаются амплитуды и фазы какой-либо из этих компонент в точках, расположенных на расстояниях, равных: *а)* глубине проникновения, *б)* длине волны (по направлению распространения плоской гармонической электромагнитной волны)?
16. От чего зависят: длина плоской гармонической волны, её глубина проникновения, фазовая скорость, импеданс: *а)* в общем случае, *б)* в изоляторе; *в)* в случае квазистационарного поля? Как в последнем случае меняются эти величины с ростом: *а)* частоты; *б)* удельного электрического сопротивления среды?

### К главе седьмой

1. Какие условия для векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , согласно теореме единственности, может "включать" краевая задача при решении прямой задачи теории переменного электромагнитного поля?
2. Как могут быть связаны с векторами электромагнитного поля векторные электродинамические потенциалы: *а)* электрического типа, *б)* магнитного типа? Непрерывность каких компонент электромагнитного поля (на поверхностях раздела сред) должны обеспечивать условия сопряжения для электродинамических потенциалов?
3. Почему при условии  $k \cdot R \rightarrow 0$  электромагнитное поле переменного электрического диполя является квазипостоянным?
4. Каковы условия, при выполнении которых точка наблюдения находится в: *а)* ближней, *б)* дальней зоне переменного (электрического или магнитного)

диполя? Что является возбудителем первичного и вторичного (в квазистационарном приближении) магнитных полей в ближней зоне переменного электрического диполя?

5. Сравните поля электрического и магнитного гармонических диполей. В чём их сходство и различие?
6. Как связаны явление скин-эффекта и понятие «глубина проникновения» поля?

## КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Отчётность студентов-заочников по курсу «Теория полей, применяемых в разведочной геофизике» включает выполнение четырёх (или по нынешним временам - хотя бы некоторых из них) контрольных работ.

Каждая контрольная работа представляется на сброшюрованных листах писчей бумаги на экзамене, либо в виде doc или pdf - файлов по e – мейл.

Текст заданий предложенного варианта контрольной работы полностью приводится в начале работы. Решения задач сопровождаются краткими пояснениями, необходимыми рисунками, графиками.

При выполнении контрольных заданий следует пользоваться учебником [1] и учебным пособием [5]. В соответствии с применёнными там обозначениями в контрольных заданиях декартовы, цилиндрические и сферические координаты обозначены соответственно:  $x, y, z$ ;  $r, \varphi, z$ ;  $R, \theta, \varphi$ . Единичные векторы, ориентированные по касательным к координатным направлениям  $l_1, l_2, l_3$ , (орты) обозначены в этих системах соответственно:  $\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z$ ;  $\mathbf{1}_r, \mathbf{1}_\varphi, \mathbf{1}_z$ ;  $\mathbf{1}_R, \mathbf{1}_\theta, \mathbf{1}_\varphi$ . При совместном применении двух или трёх систем координат (совмещенная система координат), если не указано иное, предполагается, что системы координат имеют общее начало  $O$ , ось  $Z$  совпадает с полярной осью, а начало отсчета координаты  $\varphi$  ( $\varphi=0$ ) совпадает с полуплоскостью  $y=0, x>0$  (см. [5] стр. 6 - 9).

В тех заданиях, которые включают проведение численных расчётов, численные значения даны в единицах СИ. Все математические преобразования в этих заданиях, вплоть до получения окончательных расчётных формул, следует проводить без подстановки численных значений (в "буквенных" обозначениях). Графики, построенные по результатам численных расчётов, должны быть представлены либо пользуясь (если они доступны студенту) соответствующими программными средствами на компьютерах (Excel, Grapher, Origin, Surfer и др.), либо на «миллиметровке» на основе численных расчётов на калькуляторе с указанием масштабов по осям и размерностей аргументов и функций в единицах СИ.

### Контрольная работа № 1

Эта работа содержит три задания.

1). В первом задании во всех вариантах требуется определить пространственные производные:  $\text{grad} T = \nabla T$ ,  $\text{grad div} T = \nabla^2 T = \Delta T$  скалярного поля  $T$  и  $\text{div} \mathbf{M} = (\nabla \mathbf{M})$ ,  $\text{rot} \mathbf{M} = [\nabla \mathbf{M}]$  векторного поля  $\mathbf{M}$ . Выражения для полей  $T$ ,  $\mathbf{M}$  приведены в декартовой, цилиндрической или сферической системах координат.

Необходимо также сделать выводы о том, является ли поле  $\mathbf{M}$

потенциальным, или чисто вихревым, а также о том, потенциалом какого векторного поля является скаляр  $T$  и гармоническая ли  $T$  функция. При вычислении производных можно воспользоваться формулами (1.13), (1.27), (1.33), (1.66) в учебнике [1] или (9), (12), (14), (15), в учебном пособии [5].

2). Во втором задании предлагается определить некоторые интегральные характеристики, либо найти произведение векторов. Для большинства вариантов при вычислении интегралов достаточно обратить внимание на то, какие величины сохраняются при интегрировании постоянными. В вариантах 4, 5, 11 можно учесть, что в сферических координатах на сферической поверхности  $R=\text{const}$  элементарная координатная площадка  $dS=R^2 \cdot \sin\theta d\theta d\varphi$ .

3). В третьем задании требуется, решив прямую задачу, определить статическое поле  $\mathbf{f}$ , создаваемое объёмной массой простой (симметричной) формы. Задачу рекомендуется решать по аналогии с примерами, приведенными в пособии [5] на стр. 50 - 58. На основе полученного решения надо построить график, иллюстрирующей зависимость единственной ненулевой (в данной системе координат) компоненты поля  $\mathbf{f}$  от координаты.

#### Вариант 1.

$$1). T = 1/R, \mathbf{M} = \mathbf{1}_\varphi M_\varphi, M_\varphi = \left(1 + \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right) / r.$$

2). Определить поток вектора  $(-\text{grad } T)$  через сферическую поверхность  $R=R_0=\text{const}$  и циркуляцию вектора  $\mathbf{M}$  по окружности  $r=r_0=\text{const}, z=0$ . Выражения для  $T$  и  $\mathbf{M}$  приведены в задании "1".

3). Определить поле  $\mathbf{f}$  однородного шара путем решения уравнения  $\text{div } \mathbf{f} = 4\pi\delta$ , то есть решить задачу 14 в [5] способом, применённом в [5] при решении задачи 15.

#### Вариант 2.

$$1). T = \cos\theta / R^2, \quad \mathbf{M} = \mathbf{1}_\varphi M_\varphi, M_\varphi = r \text{ при } r < r_0, \\ M_\varphi = 1/r \text{ при } r > r_0, r_0 = \text{const}.$$

2). Найти циркуляцию определенного в задании "1" вектора  $\mathbf{M}$  по двум окружностям с осью  $Z$  и с радиусами  $r_1 < r_0$  и  $r_2 > r_0$ .

3). Определить поле  $\mathbf{f} = -\text{grad } U$  бесконечного неоднородного кругового цилиндра с заданным распределением плотности  $\delta = \delta(r)$  на основе решения уравнения Пуассона  $\nabla^2 U = -4\pi\delta$ . Предлагается получить решение по аналогии с задачей 15 в [5], заменив  $\delta_i = \text{const}$  на  $\delta_i = \delta_0 \cdot (1 - r/r_{\text{ц}})$ , где  $\delta_0$  и  $r_{\text{ц}}$  - заданные плотность на оси цилиндра и его радиус.

#### Вариант 3.

$$1). T = \ln(1/r), \mathbf{M} = (\mathbf{1}_R \cdot 2 \cos\theta + \mathbf{1}_\theta \cdot \sin\theta) / R^3.$$

2). Найти поток вектора  $(-\text{grad } T)$  через поверхность прямого кругового цилиндра с осью  $Z$ , высотой  $h$  и радиусом основания  $r=r_0=\text{const}$ . Поле  $T$  определено в задании "1".

3). Определить поле  $\mathbf{f} = -\text{grad } U$  однородного шара путем решения уравнения Пуассона  $\nabla^2 U = -4\pi\delta$ , то есть решить задачу 14 в [5] способом, применённом в [5] при решении задачи 16.

Вариант 4.

1).  $T = -R^2$  при  $R < R_0$ ,  $T = 1/R$  при  $R > R_0$ ,  $R_0 = \text{const}$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{1}_r M_r + \mathbf{1}_z M_z$ ,  
 $M_r = r / (r^2 + z^2)^{3/2}$ ,  $M_z = z / (r^2 + z^2)^{3/2}$ .

2). Определить телесный угол  $\Omega$ , ограниченный поверхностью кругового конуса, если плоский угол между осью конуса и образующей конической поверхности равен  $\theta$ .

3). Определить поле  $\mathbf{f}$  неоднородного шара путем решения уравнения  $\text{div} \mathbf{f} = 4\pi\delta$ . Предлагается решить задачу 14 в [5] с заменой  $\delta_i = \delta = \text{const}$  на  $\delta_i = \delta_0 \cdot (1 - R/R_0)$  способом, применённым в [5] при решении задачи 15. Здесь  $\delta_0$  и  $R_0$  - плотность в центре шара и его радиус.

Вариант 5.

1).  $T = -r^2$  при  $r < r_0$ ,  $T = -\ln r$  при  $r > r_0$ ,  $r_0 = \text{const}$ ;  
 $\mathbf{M} = (\mathbf{1}_R \cdot \cos \theta - \mathbf{1}_r \cdot \sin \theta) / R$ .

2). Определить угол видимости  $\omega$  круга с радиусом  $r_0$  с осью  $Z$  из точки наблюдения (с координатой  $z$ ), лежащей на оси  $Z$ , если круг лежит в плоскости  $Z=0$ . Построить график функции  $\omega(Z)$ . Нормаль  $n$  к плоскости круга имеет то же направление, что ось  $Z$ .

3). Определить поле бесконечного неоднородного кругового цилиндра с заданным распределением плотности  $\delta$  на основа решения уравнения Пуассона  $\nabla^2 U = -4\pi\delta$ . Предлагается получить решение по аналогии с задачей 16 в [5] заменив  $\delta_i = \delta = \text{const}$  на  $\delta_i = \delta_0 \cdot r/r_{\text{ц}}$ , где  $\delta_0$  и  $r_{\text{ц}}$  - заданные плотность у поверхности цилиндра и его радиус.

Вариант 6.

1).  $T = \cos \varphi / r$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{1}_R / R^2$ .

2). Найти поток определенного в задании "1" вектора  $\mathbf{M}$  через сферическую поверхность радиуса  $R=R_0=\text{const}$ .

3). Определить поле массы в виде неоднородного пласта (плоскопараллельного слоя) с заданным распределением плотности  $\delta$  на основе решения уравнения  $\text{div} \mathbf{f} = 4\pi\delta$ . Предлагается получить решение задачи 15 в [5], заменив  $\delta_2 = \delta = \text{const}$  на  $\delta_2 = \delta_0(1 - 2|z|/h)$ , где  $\delta_0$  и  $h$  - заданные плотность посередине пласта и его толщина (мощность).

Вариант 7.

1).  $T = \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{1}_\varphi (1 + \cos \theta) / (R \sin \theta)$ .

2). Найти циркуляцию вектора  $\mathbf{M}$  по окружности  $R=R_0=\text{const}$ ,  $\theta=\theta_0=\text{const}$  ( $0 < \theta_0 < \pi$ ). Поле  $\mathbf{M}$  определено в задании "1".

3). Определить поле однородного пласта путем решения уравнения Пуассона  $\nabla^2 U = -4\pi\delta$ , то есть решить задачу 15 в [5] способом, примененным в [5] при решении задачи 16.

Вариант 8.

1).  $T = \cos \theta / R$ ,  $M = (\mathbf{1}_R \cos \theta - \mathbf{1}_\theta \sin \theta) / R$ .

2). Определить скалярное произведение  $p = (\mathbf{A} \mathbf{B})$ , если

$\mathbf{A} = (\mathbf{1}_r r + \mathbf{1}_z z) / (r^2 + z^2)^{3/2}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{1}_r \sin \alpha + \mathbf{1}_z \cos \alpha$ , где  $\alpha = \text{const}$ .

3). Определить поле массы в виде плоскопараллельного слоя (пласта) путем решения уравнения Гаусса:  $\oint_{S[V]} (\mathbf{f} \, d\mathbf{S}) = 4\pi m_V$ , то есть решить задачу 15 в [5]

способом, примененным в [5] при решении задачи 14. В качестве замкнутой поверхности  $S[V]$  рекомендуется выбрать поверхность прямого цилиндра с основаниями, симметричными относительно середины пласта.

#### Вариант 9.

1).  $T = \cos \varphi / r^2$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{1}_\varphi M_\varphi$ ,  $M_\varphi = R \sin \theta$ .

2). Найти циркуляцию определенного в задании "1" вектора  $\mathbf{M}$  по окружности  $R=R_0$ ,  $\theta=\theta_0$ .

3). Определить поле бесконечного неоднородного кругового цилиндра с заданным распределением плотности  $\delta$  на основе решения уравнения Пуассона  $\nabla^2 U = -4\pi\delta$ . Предлагается получить решение по аналогии с задачей 16 в [5], заменив  $\delta_i = \delta = \text{const}$  на  $\delta_i = \delta_0(1 - r/r_{\text{ц}})^2$ , где  $\delta_0$  и  $r_{\text{ц}}$  - заданные плотность на оси цилиндра и его радиус.

#### Вариант 10.

1).  $T = -z^2$  при  $|z| < h$ ,  $T = -z$  при  $|z| > h$ , где  $h = \text{const}$ .  
 $\mathbf{M} = \mathbf{1}_\varphi (1 - \cos \theta) / (R \sin \theta)$ .

2). Найти векторное произведение  $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E} \, \mathbf{M}]$ , где  $\mathbf{E} = \mathbf{1}_R / R^2$ , а поле  $\mathbf{M}$  определено в задании "1".

3). Определить поле однородного цилиндра путем решения уравнения Гаусса  $\oint_{S[V]} (\mathbf{f} \, d\mathbf{S}) = 4\pi m_V$ , то есть решить задачу 16 в [5] способом, примененным

в [5] при решении задачи 14. В качестве замкнутой поверхности  $S[V]$  рекомендуется выбрать поверхность прямого кругового цилиндра с осью, совпадающей с осью  $Z$ .

#### Вариант 11.

1).  $T = r^3$  при  $r < r_0$ ,  $T = \ln r$  при  $r > r_0$ , ( $r_0 = \text{const}$ );  
 $\mathbf{M} = (\mathbf{1}_R \cdot 2 \cos \theta - \mathbf{1}_\theta \cdot \sin \theta) / R^3$ .

2). Определить поток вектора  $\mathbf{M}$  через сферическую поверхность  $R=R_0 = \text{const}$ . Выражение для  $\mathbf{M}$  приведено в задании "1".

3). Определить поле однородного шара путем решения уравнения  $\nabla^2 U = -4\pi\delta$ , то есть решить задачу 14 в [5] способом, примененным в [5] при решении задачи 16.

### Контрольная работа № 2

Работа выполняется на основе примеров решения задач в учебном пособии [5] и содержит три задания.

1). В первом задании определен источник статического поля (конкретной физической природы) в вакууме. Опираясь на полученное в [5] выражение для потенциала  $U$  поля  $\mathbf{f}$  в цилиндрической или сферической системе координат надо определить потенциал  $U$  постоянного электрического, магнитного или гравитационного поля в декартовой системе координат. Дифференцированием  $U$

определить  $x$ -,  $y$ - и  $z$ - компоненты напряжённости соответствующего поля. Перейти к выражениям для этих компонент на горизонтальной прямой ("профиле"), параллельной одной из декартовых осей и проходящей на некотором расстоянии над источником поля. Выполнить численные расчёты и построить графики, отражающие изменение  $U$  и ненулевых декартовых компонент напряжённости поля вдоль профиля. Проанализировав полученные формулы, сделать выводы о возможном подходе к решению обратной задачи по способу характерных точек (по одному из графиков). Это означает, что требуется дать математически обоснованный ответ на вопрос, как можно определить параметры данного источника поля (глубина до центра, масса, момент, линейная плотность и т. п.) по абсциссам и ординатам характерных точек на графике (см. в качестве примера задачу 3 в [5]).

Для получения правильных результатов (в международной системе единиц СИ) необходимо учесть формулы перехода от рассматриваемого на стр. 19- 59 в [5] поля  $\mathbf{f}$  к напряжёностям электрического ( $\mathbf{E}$ ), магнитного ( $\mathbf{H}$ ) и гравитационного ( $\mathbf{G}$ ) полей:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\mathbf{f}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{f}, \quad \mathbf{G} = -\gamma\cdot\mathbf{f}, \quad \text{где } \epsilon_0 \approx 10^{-9}/36\pi$$

(Ф/м) - электрическая постоянная,  $\gamma \approx 6.67 \cdot 10^{-11}$  (м<sup>3</sup>/кг·с<sup>2</sup>) - гравитационная постоянная. Соответственно и для перехода от выражений для потенциала  $U_f$  поля  $\mathbf{f} = -\text{grad } U_f$ , к потенциалам  $U_E$ ,  $U_H$ ,  $U_G$  полей  $\mathbf{E} = -\text{grad } U_E$ ,  $\mathbf{H} = -\text{grad } U_H$ ,

$$\mathbf{G} = -\text{grad } U_G \quad \text{справедливы выражения:} \quad U_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}U_f, \quad U_H = \frac{1}{4\pi}U_f,$$

$$U_G = -\gamma U_f.$$

2). Во втором задании требуется проанализировать результаты решения двух прямых задач теории магнитоэстатического поля. Однородное тело (объект) в форме: а) шара; б) бесконечного (по высоте) кругового цилиндра; с магнитной проницаемостью  $\mu_i = \mu = (1 + \alpha) > 1$  находится в немагнитной среде с  $\mu_e = 1$  в однородном первичном магнитном поле  $\mathbf{H}^{\text{прв}} = \text{const}$ . Здесь  $\alpha = \mu - 1$  - магнитная восприимчивость. Вектор постоянной (остаточной) намагниченности  $\mathbf{J}^0$  всюду равен нулю. В задаче "б" поле  $\mathbf{H}^{\text{прв}}$  направлено по нормали (перпендикулярно) к оси цилиндра. Требуется определить (аналитически и численно) следующие характеристики:

А. Магнитный момент шара.

Б. Магнитный момент единицы длины цилиндра.

В. Коэффициент размагничивания  $N$  шара.

Г. Коэффициент размагничивания  $N$  цилиндра.

При выполнении этого задания можно воспользоваться результатами решения задач 18, 18,а, 19 в [5] и учесть математическую идентичность магнитоэстатического поля с напряжённостью  $\mathbf{H}$  и стационарного электрического поля с напряжённостью  $\mathbf{E}$ . Например, уравнения этих полей в дифференциальной форме можно представить в следующем виде (см. [1], формулы (3.2), (3-12'), (3.21), (3-25), (4-33), (4.98), (1.62)):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 0; & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0; \\ \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) &= -\operatorname{div}(\mathbf{J}^0); & \operatorname{div}(\gamma \mathbf{E}) &= -\operatorname{div}(\gamma \mathbf{E}^{\text{ср}}); \\ \mathbf{H} &= -\operatorname{grad} U; & \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} U. \end{aligned}$$

При  $\mathbf{J}^0 = 0$  и  $\mathbf{E}^{\text{ср}} = 0$  имеем:  $\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0$ ,  $\operatorname{div}(\gamma \mathbf{E}) = 0$ . А если, кроме того, в некоторой области пространства  $V$  среда однородна по магнитной проницаемости ( $\operatorname{grad} \mu = 0$ ) или удельной электропроводности ( $\operatorname{grad} \gamma = 0$ ), то (в такой области  $V$ )  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ .

Магнитный момент  $\mathbf{M}$  однородно намагниченного тела (объекта) определяет выражение  $\mathbf{M} = \mathbf{J} \cdot V_i$ , где  $V_i$  - объём тела,  $\mathbf{J} = \alpha \mathbf{H}_i$  - вектор намагниченности, а  $\mathbf{H}_i$  - суммарное магнитное поле внутри объекта (в занимаемой им области  $V_i$ ). В предложенных примерах (заданиях) коэффициент размагничивания  $N$  может быть определён из следующего равенства:  $\mathbf{H}_i^{\text{втр}} = -N \cdot \mathbf{J} = -N \cdot \alpha \cdot \mathbf{H}_i$ , где  $\mathbf{H}_i^{\text{втр}} = \mathbf{H}_i - \mathbf{H}^{\text{пвб}}$ . Для определения коэффициента размагничивания  $N$  величину  $\mu_i$  надо заменить на сумму  $1 + \alpha$ .

3). В третьем задании надо на основе имеющегося решения задачи 22 в [5] о поле точечного электрода  $A$  в присутствии плоской поверхности раздела  $S$  двух проводящих сред перейти к формулам для потенциала  $U$  стационарного электрического поля  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U$  и его скалярной компоненты  $E_z$  на оси  $Z$  цилиндрических координат (в областях  $V_1$  и  $V_2$ ) для заданных численных значений, выполнить расчёты и построить графики, отражающие изменение  $U$  и  $E_z$  вдоль проходящей через электрод  $A$  и ортогональной  $S$  оси  $Z$  (для первичного, вторичного и суммарного полей), определить, каков знак поверхностных зарядов, индуцированных на поверхности раздела (границе)  $S$ . Предполагается, что электрод расположен в среде с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_1$  на расстоянии  $h$  от границы  $S$ , а ось  $Z$  направлена из области (полупространства)  $V_1$ , в область  $V_2$  с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_2$ .

#### Вариант 1.

1). Источник электрического поля - электрический диполь с горизонтальным моментом  $\mathbf{p} = \mathbf{1}_z p$ . Уравнения, определяющие положение профиля:  $x=h$ ,  $y=0$ . При численных расчётах:  $p=10^{-8}$  Кл·м,  $h=10$  м. См. задачу 5 в [5].

2).  $\mathbf{H}^{\text{пвб}}=50$  А/м, радиуса шара и цилиндра: 10 м,  $\alpha=10^{-3}$ .

3). Эмиссия электрода  $I=1$  А,  $\rho_1=10$  Ом·м,  $\rho_2=100$  Ом·м,  $h=5$  м.

#### Вариант 2.

1). Источник гравитационного поля - однородный шар с радиусом  $R_0$  и объёмной плотностью  $\delta$ . Уравнения, определяющие положение профиля:  $z=h$ ,  $y=0$ . При численных расчётах  $R_0=20$  м,  $\delta=10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $h=100$  м. См. задачу 14 в [5].

2).  $\mathbf{H}^{\text{пвб}}=10$  А/м, радиусы шара и цилиндра - 50 м,  $\alpha=10^{-2}$ .

3). Эмиссия электрода  $I=-1$  А (подсоединён к отрицательному полюсу источника тока),  $\rho_1=100$  Ом·м,  $\rho_2=10$  Ом·м,  $h=2$  м.

#### Вариант 3.

1). Источник магнитного поля - магнитный диполь с вертикальным моментом  $\mathbf{M} = \mathbf{1}_z M$ . Уравнения, определяющие положение профиля:  $z=h$ ,  $y=0$ . При численных расчётах:  $M=10^3$  А·м<sup>2</sup>,  $h=10$  м. См. задачу 5 в [5].

2).  $\mathbf{H}^{\text{прв}}=20$  А/м, радиусы шара и цилиндра: 100 м,  $\varepsilon=10^{-3}$ .

3). Эмиссия электрода  $I=0.1$  А,  $\rho_1=100$  Ом·м,  $\rho_2=5$  Ом·м,  $h=1$  м.

Вариант 4.

1). Источник электрического поля линейный электрический диполь с линейной плотностью дипольных моментов  $\eta^\lambda$ . Уравнения, определяющие положение профиля:  $y=h$ ,  $z=\text{const}$ . При численных расчётах:  $\eta^\lambda=10^{-7}$  Кл,  $h=100$  м. См. задачу 9 в [5], а также стр. 105 - 106 в [1].

2).  $\mathbf{H}^{\text{прв}}=40$  А/м, радиусы шара и цилиндра: 20 м,  $\varepsilon=10^{-3}$ .

3). Эмиссия электрода  $I=1$  А,  $\rho_1=10$  Ом·м,  $\rho_2=100$  Ом·м,  $h=10$  м.

Вариант 5.

1). Источник электрического поля - электрический диполь с вертикальным моментом  $\mathbf{p} = \mathbf{1}_z p$ . Уравнения, определяющие положение профиля:  $z=h$ ,  $y=0$ . При численных расчётах:  $p=10^{-7}$  Кл·м,  $h=20$  м. См. задачу 5 в [5].

2).  $\mathbf{H}^{\text{прв}}=60$  А/м, радиусы шара и цилиндра: 1 м,  $\varepsilon=10^{-2}$ .

3). Эмиссия электрода  $I=1$  А,  $\rho_1=1000$  Ом·м,  $\rho_2=\infty$  (изолятор),  $h=50$  м.

Вариант 6.

1). Источник магнитного поля линейный магнитный диполь с линейной плотностью дипольных моментов  $\eta^\lambda$ . Уравнения, определяющие положение профиля:  $y=-h$ ,  $z=\text{const}$ . При численных расчётах:  $\eta^\lambda=10^2$  А·м,  $h=50$  м. См. задачу 9 в [5], а также стр. 106 в [1].

2).  $\mathbf{H}^{\text{прв}}=30$  А/м, радиусы шара и цилиндра: 20 м,  $\varepsilon=10^{-2}$ .

3). Эмиссия электрода  $I=1$  А,  $\rho_1=10$  Ом·м,  $\rho_2=1000$  Ом·м,  $h=0.5$  м.

Вариант 7.

1). Источник магнитного поля - магнитный диполь с горизонтальным моментом  $\mathbf{M} = \mathbf{1}_z M$ . Уравнения, определяющие положение профиля:  $x=-h$ ,  $y=0$ . При численных расчётах:  $M=10^2$  А·м<sup>2</sup>,  $h=30$  м. См. задачу 5 в [5].

2).  $\mathbf{H}^{\text{прв}}=40$  А/м, радиусы шара и цилиндра: 25 м,  $\varepsilon=10^{-3}$ .

3). Эмиссия электрода  $I=0.1$  А,  $\rho_1=100$  Ом·м,  $\rho_2=0$  (идеальный проводник),  $h=2$  м.

Вариант 8.

1). Источник гравитационного поля - однородный шар с радиусом  $R_0$  и объёмной плотностью  $\delta$ . Уравнения, определяющие положение профиля:  $y=-h$ ,  $z=0$ . При численных расчётах  $R_0=50$  м,  $\delta=10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $h=200$  м. См. задачу 14 в [5].

2).  $\mathbf{H}^{\text{прв}}=100$  А/м, радиусы шара и цилиндра - 50 м,  $\varepsilon=10^{-1}$ .

3). Эмиссия электрода  $I=-0.1$  А, (подсоединён к отрицательному полюсу источника тока),  $\rho_1=1000$  Ом·м,  $\rho_2=10$  Ом·м,  $h=5$  м.

Вариант 9.

1). Источник гравитационного поля - масса в виде (неограниченного по протяжённости) горизонтального однородного цилиндра с радиусом  $r_{\text{ц}}$ , осью  $Z$  и объёмной плотностью  $\delta$ . Уравнения, определяющие положение профиля:  $y=h$ ,  $z=\text{const}$ . При численных расчётах  $r_{\text{ц}}=20$  м,  $\delta=0.2 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $h=100$  м. См. задачу 16 в [5].

2).  $\mathbf{H}^{\text{прв}}=5$  А/м, радиусы шара и цилиндра - 10 м,  $\varepsilon=10^{-2}$ .

3). Эмиссия электрода  $I=-1\text{А}$ , (подсоединён к отрицательному полюсу источника тока),  $\rho_1=100\text{ Ом}\cdot\text{м}$ ,  $\rho_2=1000\text{ Ом}\cdot\text{м}$ ,  $h=20\text{ м}$ .

#### Вариант 10.

1). Источник электрического поля линейный электрический диполь с линейной плотностью дипольных моментов  $\eta^\lambda$ . Уравнения, определяющие положение профиля:  $y=-h$ ,  $z=\text{const}$ . При численных расчётах:  $\eta^\lambda=10^{-6}\text{ Кл/м}$ ,  $h=200\text{ м}$ . См. задачу 9 в [5], а также стр. 105 - 106 в [1].

2).  $\mathbf{H}^{\text{прв}}=20\text{ А/м}$ , радиусы шара и цилиндра:  $1\text{ м}$ ,  $\varepsilon=10^{-1}$ .

3). Эмиссия электрода  $I=5\text{А}$ ,  $\rho_1=1\text{ Ом}\cdot\text{м}$ ,  $\rho_2=100\text{ Ом}\cdot\text{м}$ ,  $h=10\text{ м}$ .

#### Вариант 11.

1). Источник магнитного поля линейный магнитный диполь с линейной плотностью дипольных моментов  $\eta^\lambda$ . Уравнения, определяющие положение профиля:  $y=h$ ,  $z=\text{const}$ . При численных расчётах:  $\eta^\lambda=10\text{ А/м}$ ,  $h=20\text{ м}$ . См. задачу 9 в [5], а также стр. 106 в [1].

2).  $\mathbf{H}^{\text{прв}}=100\text{ А/м}$ , радиусы шара и цилиндра:  $2\text{ м}$ ,  $\varepsilon=10^{-2}$ .

3). Эмиссия электрода  $I=1\text{ А}$ ,  $\rho_1=50\text{ Ом}\cdot\text{м}$ ,  $\rho_2=200\text{ Ом}\cdot\text{м}$ ,  $h=5\text{ м}$ .

### Контрольная работа № 3

Работа содержит два задания.

1). Требуется определить магнитное поле  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{B}$  - вектор магнитной индукции) в указанной точке наблюдения  $a$ , лежащей на части плоскости  $z=0$ , ограниченной постоянным линейным током  $I$  по периметру прямоугольника ("прямоугольной петлём") со сторонами  $2c$  и  $2d$ , параллельными (соответственно) осям  $X$ ,  $Y$  декартовых координат. В центре "петли" находится начало  $0$  координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Направление тока  $I$  образует правовинтовую систему с направлением оси  $Z$ . Среда - немагнитна ( $\varepsilon=0$ ,  $\mu=1$ ,  $\mathbf{J}^0=0$ ).

Для заданных численных значений  $2c$ ,  $2d$  и координат точки  $a$  вычислить величину  $\mathbf{B}$ . Указать, как изменится выражение для поля  $\mathbf{B}$  в случае, если "петля" будет расположена в безграничной однородной среде с магнитной проницаемостью  $\mu\neq 1$  при  $\mathbf{J}^0=0$ . (см. [1], стр. 261). При получении выражения для поля  $\mathbf{B}$  можно воспользоваться решением задачи о магнитном поле отрезка прямолинейного тока (см. [1], стр. 246 и рис. 22 на стр. 87).

2). Магнитное поле создаёт постоянный объёмный ток  $I$  (с плотностью  $\mathbf{j}$ ). Допустим, что в интересующей нас области пространства магнитное поле ( $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ) определяется током по такому участку токовой цепи (магнитное поле токов в остальных частях цепи - пренебрежимо мало), где проводник имеет форму кругового цилиндра, достаточно протяженного, чтобы его можно было считать бесконечно-протяженным. Радиус проводника -  $r_0$ , его удельное электрическое сопротивление -  $\rho$ . В этом случае в цилиндрической системе координат с осью  $Z$ , совпадающей с осью проводника и направленной по току (по направлению  $\mathbf{j}$ ) поле  $\mathbf{j} = \mathbf{1}_z j_z$ ,  $j_z = I/(\pi r_0^2)$  при  $r < r_0$  и  $j_z = 0$  при  $r > r_0$ .

При этом, как можно показать на основе Закона полного тока (см. [1], стр. 243, 244), магнитное поле  $\mathbf{B} = \mathbf{1}_\varphi B_\varphi$ ,  $B_\varphi = \frac{\mu_0 I_S}{2\pi r}$ , где  $I_S = \int_S (\mathbf{j} \cdot \mathbf{dS})$  - поток вектора

плотности тока  $\mathbf{j}$  через поверхность  $S$ , ограниченную окружностью с радиусом  $r$ . В частности, такой поверхностью  $S$  может быть круг с радиусом  $r_0$  и с площадью  $\pi \cdot r_0^2$ . Поток  $I_S$  (с точностью до знака) равен электрическому току через поверхность  $S$ .

В этом задании требуется при указанных выше условиях определить в цилиндрической системе координат следующее.

А). Напряжённость магнитного поля  $\mathbf{H}$  при  $r > r_0$ , а также внутри цилиндрического проводника с током, при  $r < r_0$ .

Б). Напряжённость электрического поля  $\mathbf{E}$  при  $r < r_0$  (см. [1], стр. 181).

В). Вектор  $\mathbf{Y}$  Умова - Пойнтинга при  $r < r_0$  (см. [1], стр. 275).

Г). Электромагнитную энергию  $Q$ , которая переходит в тепловую энергию в единице длины проводника (прямом круговом цилиндре  $Ц$  единичной высоты с радиусом  $r_0$ ) за единицу времени (см. [1], стр. 276).

Д). Поток  $\Psi$  вектора  $\mathbf{Y}$  (поток ЭМ энергии за единицу времени) через поверхность цилиндра  $Ц$  (см. [1], стр. 275 - 276).

Е). Надо также для заданных значений  $I, r_0, \rho, r$  численно определить величины  $E, H, Y, Q, \Psi$ . Пояснить почему приведенных в задании данных недостаточно для определения напряжённости электрического поля  $\mathbf{E}$  и вектора плотности потока электромагнитной энергии  $\mathbf{Y}$  вне проводника с током (при  $r > r_0$ ).

В предложенной задаче магнитное поле можно определить, например, путем решения уравнения  $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}$  (см. (5.42) в [1]), или применяя (как это показано выше) интегральную форму этого уравнения (см. (5.43) в [1]) к контуру  $l$  в форме окружности с осью  $Z$ . См. также [1], стр. 181, 194, 196-198, 243-249, 257, 274-276.

#### Вариант 1.

1). Координаты точки наблюдения  $a$ :  $x=0, y=0, z=h$ . При численных расчётах:  $c=500$  м,  $d=1000$  м,  $I=5$  А,  $h=100$  м.

2).  $I=1$  А,  $r_0=0.01$  м,  $\rho=0.0001$  Ом·м, при расчёте  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{Y}$   $r=0.01$  м.

#### Вариант 2.

1). Координаты точки наблюдения  $a$ :  $x=-h, y=0, z=0$ . При численных расчётах:  $c=200$  м,  $d=100$  м,  $I=1$  А,  $h=50$  м.

2).  $I=1$  А,  $r_0=0.1$  м,  $\rho=1$  Ом·м, при расчёте  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{Y}$   $r=0.1$  м.

#### Вариант 3.

1). Координаты точки наблюдения  $a$ :  $x=0, y=0$ , а)  $z=0$ , б)  $z=h$  (расчёт для 2-х случаев). При численных расчётах:  $c=100$  м,  $d=100$  м,  $I=2$  А,  $h=200$  м.

2).  $I=0.1$  А,  $r_0=1$  м,  $\rho=10$  Ом·м, при расчёте  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{Y}$   $r=0.5$  м.

#### Вариант 4.

1). Координаты точки наблюдения  $a$ :  $x=0, y=0, z=0$ . При численных расчётах:  $c=1000$  м,  $d=750$  м,  $I=10$  А.

2).  $I=0.5$  А,  $r_0=0.02$  м,  $\rho=0.01$  Ом·м, при расчёте  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{Y}$   $r=0.01$  м.

#### Вариант 5.

1). Координаты точки наблюдения  $a$ :  $x=h, y=0, z=0$ . При численных

расчётах:  $c=50$  м,  $d=100$  м,  $I=1$  А,  $h=10$  м.

2).  $I=1$  А,  $r_0=0.1$  м,  $\rho=0.1$  Ом·м, при расчёте **H** и **Y**  $r=0.01$  м.

Вариант 6.

1). Координаты точки наблюдения  $a$ :  $x=0$ ,  $y=-h$ ,  $z=0$ . При численных расчётах:  $c=250$  м,  $d=500$  м,  $I=3$  А,  $h=400$  м.

2).  $I=10$  А,  $r_0=0.02$  м,  $\rho=0.00001$  Ом·м, при расчёте **H** и **Y**  $r=0.01$  м.

Вариант 7.

1). Координаты точки наблюдения  $a$ :  $x=y=h$ ,  $z=0$ . При численных расчётах:  $c=300$  м,  $d=200$  м,  $I=2$  А,  $h=100$  м.

2).  $I=10$  А,  $r_0=0.5$  м,  $\rho=0.2$  Ом·м, при расчёте **H** и **Y**  $r=0.5$  м.

Вариант 8.

1). Координаты точки наблюдения  $a$ :  $x=0$ ,  $y=0$ , а)  $z=0$ , б)  $z=h$  (расчёт для 2-х случаев). При численных расчётах:  $c=200$  м,  $d=200$  м,  $I=5$  А,  $h=200$  м.

2).  $I=0.5$  А,  $r_0=0.001$  м,  $\rho=0.001$  Ом·м, при расчёте **H** и **Y**  $r=0.001$  м.

Вариант 9.

1). Координаты точки наблюдения  $a$ : а)  $x=0$ , б)  $x=h$  (расчёт для 2-х случаев),  $y=0$ ,  $z=0$ . При численных расчётах:  $c=500$  м,  $d=500$  м,  $I=10$  А,  $h=400$  м.

2).  $I=1$  А,  $r_0=0.15$  м,  $\rho=0.5$  Ом·м, при расчёте **H** и **Y**  $r=0.1$  м.

Вариант 10.

1). Координаты точки наблюдения  $a$ :  $x=0$ ,  $y=0$ , а)  $z=0$ , б)  $z=h$  (расчёт для 2-х случаев). При численных расчётах:  $c=100$  м,  $d=100$  м,  $I=1$  А,  $h=50$  м.

2).  $I=1$  А,  $r_0=0.01$  м,  $\rho=0.001$  Ом·м, при расчёте **H** и **Y**  $r=0.005$  м.

Вариант 11.

1). Координаты точки наблюдения  $a$ : а)  $x=0$ , б)  $x=h$ ,  $y=0$ ,  $z=0$  (расчёт для 2-х случаев). При численных расчётах:  $c=200$  м,  $d=200$  м,  $I=2$  А,  $h=100$  м.

2).  $I=10$  А,  $r_0=0.1$  м,  $\rho=0.1$  Ом·м, при расчёте **H** и **Y**  $r=0$ .

**Контрольная работа № 4**

Работа содержит два задания.

1). Предлагается привести соответствующие формулы и результаты численных расчётов, выполненных с целью определения некоторых характеристик гармонически меняющегося электромагнитного поля. При заданных электромагнитных параметрах среды:  $\rho=1/\gamma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  и частоте  $f=\omega/(2\pi)$  электромагнитного поля надо оценить отношение амплитуд плотности токов

смещения  $\mathbf{j}^{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  (в случае гармонически меняющегося поля в

комплексной форме  $\check{\mathbf{j}}^{\text{см}} = -i \cdot \omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot \check{\mathbf{E}}$ ) и плотности токов проводимости  $\mathbf{j} = \gamma \cdot \mathbf{E}$  и сделать вывод о том, является ли электромагнитное поле квазистационарным, либо, напротив, в среде существенно преобладают токи смещения (см. [1], стр. 280, 292 - 298). Вычислить (комплексное) волновое число  $k = a + ib$ . Надо также (при заданных частоте и электромагнитных параметрах среды) определить следующие характеристики плоской гармонической электромагнитной волны в однородной среде: длину волны  $\lambda$ , глубину проникновения поля ("толщину" скин-слоя)  $\delta$ , фазовую скорость  $v_{\text{фаз}}$  и импеданс (волновое сопротивление)  $Z$ . Пояснить, что характеризует импеданс, в

частности, как понимать то, что в общем случае  $Z$  является комплексной величиной. Оценить соотношение между  $\lambda$  и  $\delta$ . При выполнении задания необходимо учесть, что абсолютная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_a = \epsilon_0 \cdot \epsilon$ , а абсолютная магнитная проницаемость  $\mu_a = \mu_0 \cdot \mu$ .

2). Во втором задании надо, введя систему координат, поставить краевую задачу (не решая её). Для заданной физической ситуации надо указать какому уравнению (и в каких областях пространства) должна удовлетворять искомая функция (например, потенциал), а также сформулировать дополняющие условия, обеспечивающие единственность решения прямой задачи: краевые условия, условия сопряжения, начальные условия и т. д. - в зависимости от конкретной задачи. Указать то, следствием каких законов, уравнений являются эти условия, каков их физический смысл. Привести рисунок, показывающий положение системы координат по отношению к заданным возбудителям поля и модели среды. При постановке краевой задачи следует, по возможности, выбрать такую систему координат, в которой благодаря симметрии поля число аргументов искомой функции было бы минимальным, а особые поверхности совпадали с координатными поверхностями.

О краевых задачах и условиях единственности см. [1], стр. 49-63, 118-120, 165-169, 223-228, 260-261, 299-308, 356-358, а также [5], стр. 51-53.

#### Вариант 1.

1). а) частота  $f=10^3$  Гц=1 кГц,  $\rho=100$  Ом·м,  $\epsilon=10$ ,  $\mu=1$ ; б)  $f=10^7$  Гц=10 МГц,  $\rho=10^5$  Ом·м,  $\epsilon=10$ ,  $\mu=1$ .

2). Заданный источник стационарного электрического поля - точечный электрод с эмиссией  $I$ , расположенный на плоской горизонтальной границе между проводящим (нижним) полупространством  $V_2$  и непроводящим (верхним) полупространством  $V_1$ . В нижнем полупространстве  $V_2$  на глубине  $h$  имеется горизонтальная плоская граница, выше которой удельное электрическое сопротивление  $\rho = \rho_1$ , а ниже -  $\rho = \rho_2$ . Поставить краевую задачу для нижнего полупространства  $V_2$ . Следует учесть, что точечный электрод расположен не в однородном участке среды, а на плоской границе между изолятором и проводником с  $\rho = \rho_1$ . См. задачи 21, 22 в [5].

#### Вариант 2.

1). а) частота  $f=1$  Гц,  $\rho=10$  Ом·м,  $\epsilon=30$ ,  $\mu=1$ ; б)  $f=10^8$  Гц=100 МГц,  $\rho=10^3$  Ом·м,  $\epsilon=10$ ,  $\mu=1$ .

2). В однородном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_e$  задано первичное однородное поле  $\mathbf{E}^n = \text{const}$ . В диэлектрике имеется непроводящее включение в форме шара с радиусом  $R_0$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_i$ . Полагая, что величины  $\mathbf{E}^n$ ,  $R_0$ ,  $\epsilon_e$ ,  $\epsilon_i$  - заданы, а свободные заряды всюду отсутствуют, поставить краевую задачу для потенциала  $U$  электростатического поля ( $\mathbf{E} = -\text{grad}U$ ). См. задачу 18 в [5] и стр. 230 в [1].

#### Вариант 3.

1). а) частота  $f=10$  Гц,  $\rho=1000$  Ом·м,  $\epsilon=10$ ,  $\mu=1$ ; б)  $f=10^4$  Гц,  $\rho=\infty$  (изолятор) Ом·м,  $\epsilon=1$ ,  $\mu=1$  (при  $\rho=\infty$ ,  $\epsilon=1$ ,  $\mu=1$  - вакуум).

2). Плоскость  $S$  разделяет пространство на две области (полупространства)

$V_1, V_2$  с магнитными проницаемостями  $\mu_1, \mu_2$  соответственно. Заданный возбудитель магнитоэлектрического поля  $\mathbf{H}$  - магнитный диполь с моментом  $\mathbf{M}$ , расположенный в области  $V_1$  на расстоянии  $h$  от плоскости  $S$ . Направление  $\mathbf{M}$  - по нормали к  $S$  (в сторону  $S$ ). Поставить краевую задачу для потенциала  $U$  поля  $\mathbf{H}$  ( $\mathbf{H} = -\text{grad}U$ ), полагая, что  $\mu_1, \mu_2, h, \mathbf{M}$  - заданные величины, а вектор постоянной намагниченности  $\mathbf{J}^0$  всюду равен нулю. См. [1], стр. 100, 132, 166, 253, 261.

Вариант 4.

1). а) частота  $f=100$  Гц,  $\rho=100$  Ом·м,  $\varepsilon=40, \mu=1$ ; б)  $f=10^9$  Гц=1 ГГц,  $\rho=100$  Ом·м,  $\varepsilon=10, \mu=1$ .

2). Поставить краевую задачу для потенциала  $U$  поля  $\mathbf{H}$  ( $\mathbf{H} = -\text{grad}U$ ), полагая, что  $\mu_1, \mu_2, -2h, \mathbf{M}$  - заданные величины, а вектор постоянной намагниченности  $\mathbf{J}^0$  всюду равен нулю. См. [1], стр. 100, 132, 166, 253, 261.

Вариант 5.

1). а) частота  $f=10^4$  Гц=10 кГц,  $\rho=10^{-4}$  Ом·м,  $\varepsilon=1, \mu=1$ ; б)  $f=10^4$  Гц=10 кГц,  $\rho=10^6$  Ом·м,  $\varepsilon=5, \mu=1$ .

2). Сферическая поверхность  $S$  радиуса  $R_0$  делит пространство на две области: внутреннюю  $V_i$  ( $R < R_0$ ) с удельной электропроводностью  $\gamma=\gamma_i$  и внешнюю  $V_e$  ( $R > R_0$ ) с удельной электропроводностью  $\gamma=\gamma_e$ . На поверхности  $S$  задана контактная э. д. с.,  $\mathcal{E}^{\text{КНТ}}$ , меняющаяся по закону  $\mathcal{E}^{\text{КНТ}} = \mathcal{E}_0 \cos \theta$ , где  $\theta$  - угол между лучом, направленным из центра поверхности  $S$  вертикально вниз, и отрезком, соединяющим этот центр с произвольной точкой на поверхности  $S$ . Поставить краевую задачу для потенциала  $U$  стационарного электрического поля  $\mathbf{E}$  ( $\mathbf{E} = -\text{grad}U$ ), полагая, что  $R_0, \mathcal{E}_0, \gamma_i, \gamma_e$  - заданные величины. На рисунке, помимо системы координат и модели среды показать, как могут быть распределены на поверхности  $S$  заряды, образующие двойной слой. О контактной э. д. с. см. [1], стр. 195. См. задачу 24 в [5].

Вариант 6.

1). а) частота  $f=10$  Гц,  $\rho=10^5$  Ом·м,  $\varepsilon=10, \mu=1$ ; б)  $f=10^7$  Гц=10 МГц,  $\rho=10^5$  Ом·м,  $\varepsilon=10, \mu=1$ .

2). Заданным возбудителем электромагнитного поля является переменный электрический диполь - элементарный отрезок  $dl$  переменного линейного тока  $I$ , расположенный в безграничной однородной среде с электромагнитными параметрами  $\gamma, \varepsilon, \mu$ . Поставить краевую задачу для векторного электродинамического потенциала  $\mathbf{A}$  электрического типа, полагая что электромагнитное поле требуется определить при  $t > 0$ , а зависимость  $I$  от времени  $t$  следующая:  $I=0$  при  $t < 0, I=I_0$  при  $t > 0$  (амплитуда  $I_0=\text{const}$ ). См. [1], стр. 300, 309, 261, 286.

Вариант 7.

1). а) частота  $f=100$  Гц=1 кГц,  $\rho=100$  Ом·м,  $\varepsilon=20, \mu=1$ ; б)  $f=10^6$  Гц=1 МГц,  $\rho=10^6$  Ом·м,  $\varepsilon=5, \mu=1$ .

2). Плоскость  $S$  разделяет пространство на две области (полупространства)  $V_1, V_2$  с удельными электрическими сопротивлениями  $\rho_1$  и  $\rho_2$  соответственно. В

области  $V_1$  на расстоянии  $h$  от  $S$  в точке  $D$  находится центр электродного диполя с моментом, направленным по нормали к  $S$  (в сторону  $S$ ). "Электродный диполь" - это совокупность двух точечных электродов:  $A$  с эмиссией  $I$  (и зарядом  $e$ ) и  $B$  с эмиссией  $-I$  (и зарядом  $-e$ ) при условии, что расстояние  $AB$  - бесконечно мало. Поставить краевую задачу для потенциала  $U$  стационарного электрического поля  $\mathbf{E}$  ( $\mathbf{E} = -\text{grad } U$ ), полагая, что  $\rho_1, \rho_2, h, AB, I$  - известные величины. Предложенный пример аналогичен задаче 22 в [5], но отличается иным заданным источником поля. См. [1], стр. 222, а также [5], стр. 29 - 32.

#### Вариант 8.

1). а) частота  $f=10^6$  Гц=1 МГц,  $\rho=0.1$  Ом·м,  $\varepsilon=80, \mu=1$ ; б)  $f=10^6$  Гц=1 МГц,  $\rho=10^5$  Ом·м,  $\varepsilon=80, \mu=1$ .

2). Две цилиндрические границы с радиусами  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ) и с общей осью делят пространство на три области:  $V_1, V_2, V_3$  с удельными электрическими сопротивлениями  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  соответственно. Заданный источник стационарного электрического поля - точечный электрод с эмиссией  $I$ , расположенный на оси симметрии модели среды. Полагая, что  $a, b, \rho_1, \rho_2, \rho_3, I$  - заданные величины, поставить краевую задачу для потенциала  $U$  электрического поля  $\mathbf{E}$ . См. [5], стр. 97 - 101.

#### Вариант 9.

1). а) частота  $f=10^2$  Гц,  $\rho=10^{-4}$  Ом·м,  $\varepsilon=1, \mu=10$ ; б)  $f=100$  Гц,  $\rho=\infty$  (изолятор),  $\varepsilon=1, \mu=1$ .

2). Заданным возбудителем гармонически меняющегося электромагнитного поля является вертикальный переменный электрический диполь - элементарный отрезок  $dl$  переменного линейного тока  $I=I_0 \cdot \cos(\omega t)$  (в комплексной форме:  $I = I_0 \cdot \exp(-i\omega t)$ ). Будем полагать, что среда - всюду немагнитна ( $\mu=1$ ). Диполь находится в среде с электрическими параметрами  $\gamma_1, \varepsilon_1$ , а на расстоянии  $h$  под центром диполя имеется горизонтальная граница  $S$ , ниже которой  $\gamma = \gamma_2, \varepsilon = \varepsilon_2$ . Поставить краевую задачу для векторного электродинамического потенциала  $\mathbf{A}$  (электрического типа) в предположении, что вектор  $\mathbf{A}$  направлен вертикально, а  $dl, I_0, \omega, \gamma_1, \varepsilon_1, \gamma_2, \varepsilon_2, h$  - заданы. Данный пример подобен задаче на стр. 320-321 В [1], но отличается иным заданным (сторонним) возбудителем поля. См. также [1], стр. 303, 307, 309.

#### Вариант 10.

1). а) частота  $f=10$  Гц,  $\rho=1000$  Ом·м,  $\varepsilon=10, \mu=1$ ; б)  $f=10^9$  Гц=1 ГГц,  $\rho=100$  Ом·м,  $\varepsilon=10, \mu=1$ .

2). Точечный электрод  $A$  с эмиссией  $I$  находится посередине пласта (плоскопараллельного слоя) с мощностью  $h$ , с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_n$  (на расстояниях  $h/2$  от кровли и подошвы пласта). Кровля пласта - граница с изолятором ( $\rho=\infty$ ), подошва - граница с идеальным проводником ( $\rho=0$ ). Полагая, что  $I, \rho_n, h$  - заданы, поставить краевую задачу для потенциала  $U$  стационарного электрического поля  $\mathbf{E}$  для области пространства с удельным сопротивлением  $\rho_n$  (пласта). О краевых условиях I-го, II-го и III-го типа см. [1], стр. 54, 224 - 227; см, также задачи 21, 22 в [5].

#### Вариант 11.

1). а) частота  $f=10^5$  Гц,  $\rho=100$  Ом·м,  $\varepsilon=5, \mu=1$ ; б)  $f=10^5$  Гц,  $\rho=10^7$  Ом·м,  $\varepsilon=5,$

$\mu=1$ .

2). Две коаксиальные цилиндрические поверхности с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  делят пространство на три области: внутреннюю  $V_1$  (цилиндр с радиусом  $r_1$ ),  $V_2$  (цилиндрический слой, ограниченный поверхностями с радиусами  $r_1, r_2$ ) и  $V_3$ , не ограниченную снаружи. Вектор постоянной намагниченности  $\mathbf{J}^o$  всюду равен нулю, а магнитные проницаемости указанных областей равны соответственно  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ . Однородное первичное магнитостатическое поле  $\mathbf{H}^{прв} = \text{const}$  - это поле, которое существовало бы в безграничной однородной среде с  $\mu_3 = \mu_3$ , и направлено по нормали к оси симметрии модели среды. Полагая, что величины  $r_1, r_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mathbf{H}^{прв}$  - заданы, поставить краевую задачу для потенциала  $U$  магнитостатического поля  $\mathbf{H}$ . См. задачи 18, а, 19 в [5], а также сказанное выше. в контрольной работе № 2 о математической идентичности магнитостатического и стационарного электрического полей.

### Литература

1. Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике». М., "Недра", 1985.

1, а. Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебник для ВУЗов. **Часть I.** "Введение". Глава первая "Поле", 2019, 104 с.

<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41710031> или

[http://magnetometry.ru/files/Alpin\\_uch\\_vol1\\_2019.pdf](http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol1_2019.pdf) или

[http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT\\_ID=5777](http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT_ID=5777)

1, б. Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебник для ВУЗов. **Часть II.** Глава вторая "Статическое поле в вакууме". Глава третья "Статическое поле в присутствии среды", 2020, 111 с.

<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42771398> или

[http://magnetometry.ru/files/Alpin\\_uch\\_vol2\\_2019.pdf](http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol2_2019.pdf) .

1, в. Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебник для ВУЗов. **Часть III.** Глава четвёртая "Стационарное электрическое поле". Глава пятая "Магнитное поле постоянного тока", 2020, 106 с.

<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42782333> или

[http://magnetometry.ru/files/Alpin\\_uch\\_vol3\\_2020.pdf](http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol3_2020.pdf) .

1, г. Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебник для ВУЗов. **Часть IV.** Глава шестая "Переменное электромагнитное поле". Глава седьмая "Прямая задача теории переменного электромагнитного поля", 2020, 104 с.

<https://elibrary.ru/item.asp?id=43803479> или

[http://magnetometry.ru/files/Alpin\\_uch\\_vol4\\_2020.pdf](http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol4_2020.pdf) .

2. Альпин Л. М. Теория поля. М., "Недра", 1966.

3. Альпин Л. М. Практические работы по теории поля. М., "Недра", 1971.

4. Бурсиан В. Р. Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке. Л., "Недра", 1972.

5. Каринский А. Д. Практикум «Теория полей, применяемых в разведочной геофизике». Статические поля. Стационарное электрическое поле. Изд-во

РГГРУ, 2007, 105 с.

5, а. Каринский А. Д. Практикум «Теория полей, применяемых в разведочной геофизике». Статические поля, стационарное электрическое поле. Учебное пособие, 2014, 105 с.

[http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT\\_ID=2657](http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT_ID=2657) или

[http://magnetometry.ru/files/Karinskiy\\_lab\\_2014.pdf](http://magnetometry.ru/files/Karinskiy_lab_2014.pdf) или

<http://www.geokniga.org/books/6823>.

6. Каринский А. Д. Лекции по «Теории поля» («Теории полей, применяемых в разведочной геофизике»). Учебное пособие, 2014, 203 с.

[http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT\\_ID=2656](http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT_ID=2656) или

[http://magnetometry.ru/files/Karinskiy\\_lec\\_2014.pdf](http://magnetometry.ru/files/Karinskiy_lec_2014.pdf) или

<http://www.geokniga.org/books/6822>.

7. Кауфман А. А. Введение в теорию геофизических методов. Часть 1. Гравитационные, электрические и магнитные поля. М., «Недра», 1997.

8. Кауфман А. А. Введение в теорию геофизических методов. Часть 2. Электромагнитные поля. М., «Недра», 2000.

9. Кудрявцев Ю. И. Теория поля и ее применение в геофизике. М., «Недра», 1988.

10. Овчинников И. К. Теория поля. М., «Недра», 1979.

## Об оформлении курсовых проектов для групп ЗРФ (и РФ)

В "режиме изоляции" студенты могут получить задания по проектам (на группу или индивидуально) по e-мейл.

Название курсовых проектов по "Теории поля" примерно такое "Решение прямой задачи....., численные расчёты и анализ полученных результатов".

После титульного листа (см. ниже) **необходимо** полностью привести задание по проекту, а затем соответствующие этому заданию разделы проекта.

Все формулы следует получать в "буквенных обозначениях", чтобы они были справедливы при любых численных параметрах модели. Приведенные в задании численные значения следует подставлять только на этапах численных расчётов и построения графиков, а также - при "опробовании" методики решения обратной задачи на примере этих графиков.

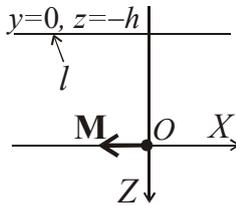
Выполненные курсовые проекты (особенно в "режиме изоляции"), подготовленные в "формате" **doc**, можно переслать на проверку по e-мейл или на сайте stud.mgri.

Работы, являющиеся копиями уже выполненных другими студентами проектов, либо явным плагиатом, не могут получить удовлетворительную оценку.

## Примеры заданий к курсовым проектам для групп ЗРФ (и РФ)

### Для курсовых проектов "пониженной" сложности

Вар. 111.



Источник постоянного магнитного поля  $\mathbf{H}$  – расположенный в начале декартовых координат магнитный диполь с моментом  $\mathbf{M}$ , анипараллельным направлению оси  $X$ . Потенциал  $U$  связан с полем  $\mathbf{H}$  равенством  $\mathbf{H} = -\text{grad } U$ .

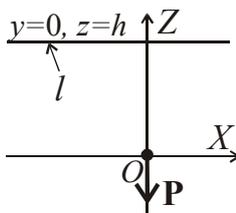
#### Задание

1. Выразить потенциал  $U$  как функцию декартовых координат  $x, y, z$  точки наблюдения.
2. Получить выражения для декартовых компонент  $H_x, H_y, H_z, B_x, B_y, B_z$  поля  $\mathbf{H}$  и (в немагнитной среде) поля  $\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{H}$ .
3. Перейти к выражениям для  $U, B_x, B_y, B_z$  для случая, когда точка наблюдения лежит на параллельной оси  $X$  прямой  $l$  ( $y=0, z=-h$ ).
4. На основе **численных расчётов** построить графики функций  $B_z(x), B_x(x)$  при  $y=0, z=-h$ .
5. Показать, как можно решить обратную задачу (определить глубину  $h$  и магнитный момент  $M$ ) по способу характерных точек по этим графикам. Сделать выводы о возможности решения обратной задачи при заданных параметрах модели.

**При численных расчётах:**  $M = 100000 \text{ мА} \cdot \text{м}^2$ ,  
 $h = 5 \text{ м}$ .

См. [5], задачу 5, формулу (19'), задачу 3.

Вар. 141.



Источник постоянного электрического поля  $\mathbf{E}$  – расположенный в начале декартовых координат электрический диполь с моментом  $\mathbf{P}$ , анипараллельным направлению оси  $Z$ . Потенциал  $U$  связан с полем  $\mathbf{E}$  равенством  $\mathbf{E} = -\text{grad } U$ .

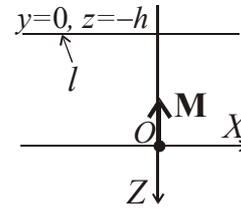
#### Задание

1. Выразить потенциал  $U$  как функцию декартовых координат  $x, y, z$  точки наблюдения.
2. Получить выражения для декартовых компонент  $E_x, E_y, E_z$  поля  $\mathbf{E}$ .
3. Перейти к выражениям для  $U, E_x, E_y, E_z$  для случая, когда точка наблюдения лежит на параллельной оси  $X$  прямой  $l$  ( $y=0, z=h$ ).
4. На основе **численных расчётов** построить графики функций  $U(x), E_x(x)$  при  $y=0, z=h$ .
5. Показать, как можно решить обратную задачу (определить  $h$  и  $P$ ) по способу характерных точек по графикам  $U(x), E_x(x)$ . Сделать выводы о возможности решения обратной задачи при заданных параметрах модели.

**При численных расчётах:**  $P = 10^{-4} \text{ Кл} \cdot \text{м}$ ,  
 $h = 20 \text{ м}$ .

См. [5], задачу 5, формулу (19'), задачу 3.

ВАР. 120.



Источник постоянного магнитного поля  $\mathbf{H}$  – расположенный в начале декартовых координат магнитный диполь с моментом  $\mathbf{M}$ , анипараллельным направлению оси  $Z$ . Потенциал  $U$  связан с полем  $\mathbf{H}$  равенством  $\mathbf{H} = -\text{grad } U$ .

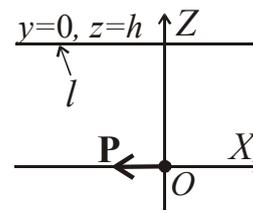
#### Задание

1. Выразить потенциал  $U$  как функцию декартовых координат  $x, y, z$  точки наблюдения.
2. Получить выражения для декартовых компонент  $H_x, H_y, H_z, B_x, B_y, B_z$  поля  $\mathbf{H}$  и (в немагнитной среде) поля  $\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{H}$ .
3. Перейти к выражениям для  $U, B_x, B_y, B_z$  для случая, когда точка наблюдения лежит на параллельной оси  $X$  прямой  $l$  ( $y=0, z=-h$ ).
4. На основе **численных расчётов** построить графики функций  $B_z(x), B_x(x)$  при  $y=0, z=-h$ .
5. Показать, как можно решить обратную задачу (определить глубину  $h$  и магнитный момент  $M$ ) по способу характерных точек по этим графикам. Сделать выводы о возможности решения обратной задачи при заданных параметрах модели.

**При численных расчётах:**  $M = 50 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ ,  
 $h = 20 \text{ м}$ .

См. [5], задачу 5, формулу (19'), задачу 3.

ВАР. 145.



Источник постоянного электрического поля  $\mathbf{E}$  – расположенный в начале декартовых координат электрический диполь с моментом  $\mathbf{P}$ , анипараллельным направлению оси  $X$ . Потенциал  $U$  связан с полем  $\mathbf{E}$  равенством  $\mathbf{E} = -\text{grad } U$ .

#### Задание

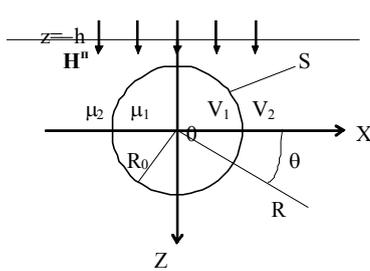
1. Выразить потенциал  $U$  как функцию декартовых координат  $x, y, z$  точки наблюдения.
2. Получить выражения для декартовых компонент  $E_x, E_y, E_z$  поля  $\mathbf{E}$ .
3. Перейти к выражениям для  $U, E_x, E_y, E_z$  для случая, когда точка наблюдения лежит на параллельной оси  $X$  прямой  $l$  ( $y=0, z=h$ ).
4. На основе **численных расчётов** построить графики функций  $U(x), E_x(x)$  при  $y=0, z=h$ .
5. Показать, как можно решить обратную задачу (определить  $h$  и  $P$ ) по способу характерных точек по этим графикам. Сделать выводы о возможности решения обратной задачи при заданных параметрах модели.

**При численных расчётах:**  $P = 10^{-3} \text{ Кл} \cdot \text{м}$ ,  
 $h = 50 \text{ м}$ .

См. [5], задачу 5, формулу (19'), задачу 3.

*Для курсовых проектов средней сложности*

ВАР. 18.



Модель среды - кусочно-однородная. Сферическая граница  $S$ , разделяет области  $V_1$  и  $V_2$  с магнитными проницаемостями  $\mu_1$  и  $\mu_2$  соответственно. Задано однородное (всюду) первичное поле  $\mathbf{H}^0$  (поле в однородной среде с  $\mu=\mu_2$ ) по направлению которого на рис. ориентирована ось  $Z$ .

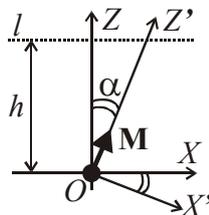
**Задание.**

- 1) Поставить и решить прямую задачу (как краевую задачу), определив потенциал  $U$  ( $\mathbf{H}=\mathbf{H}^0+\mathbf{H}^b=-\text{grad } U=-\text{grad } (U^0+U^b)$  в областях  $V_1, V_2$  (в сферической системе координат).
- 2) Перейти к выражениям для  $U$  (в областях  $V_1$  и  $V_2$ ) в плоскости  $y=0$  в показанной на рис. декартовой системе координат.
- 3) Получить выражения для компонент  $H_x^b, H_z^b$ .
- 4) На основе **численных расчётов** построить графики функций  $H_x^b(x), H_z^b(x)$  при  $z=-h$ .
- 5) Проанализировать результаты. Показать, как можно решить обратную задачу по способу характерных точек по графикам  $H_x^b(x), H_z^b(x)$  при  $z=-h$ . Сделать выводы о возможности решения обратной задачи при заданных параметрах модели.

**При численных расчётах:**  $H^0=1000$  мА/м,  $R_0=20$  м,  $h=40$  м,  $\mu_1=1.5$ ,  $\mu_2=1$ .

См. [5], задачи 18, 18,а, выражения (84)- (88), задачу 3, рис. 3, д.

ВАР.52.



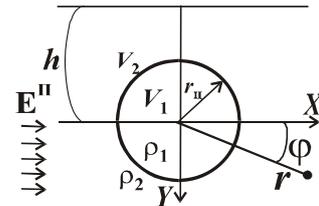
Источник постоянного магнитного поля  $\mathbf{H}, \mathbf{B}$  – расположенный в начале декартовых координат магнитный диполь с моментом  $\mathbf{M}$  по направлению оси  $Z'$  (лежащим в плоскости  $y=0$ ). Потенциал  $U$  связан с полем  $\mathbf{H}$  равенством  $\mathbf{H}=-\text{grad } U$ . Поле  $\mathbf{B}=\mu_0 \cdot \mathbf{H}$ .

**Задание.**

- 1) Выразить потенциал  $U$  как функцию декартовых координат  $x', y, z'$ , а затем - координат  $x, y, z$ .
- 2) Получить выражения для декартовых компонент  $B_x, B_z$  поля  $\mathbf{B}$ .
- 3) Перейти к выражениям для  $U, B_x, B_z$  для случая, когда точка наблюдения лежит на параллельной оси  $X$  прямой  $l$  ( $y=0, z=h$ ).
- 4) На основе **численных расчётов** построить графики функций  $B_x(x), B_z(x)$  при  $y=0, z=h$  и при  $\alpha=0^\circ$  и  $\alpha=15^\circ$ .
- 5) Для случая, когда  $\alpha=0^\circ$ , показать, как можно решить обратную задачу (определить  $h$  и  $M$ ) по способу характерных точек по этим графикам. Сделать выводы о возможности решения обратной задачи при заданных параметрах модели.

**При численных расчётах:**  $M=1001$  А·м<sup>2</sup>,  $h=500$  м. См. [5], задачу 5, задачу 3, рис. 3, д, рис. 5, выражение (19') + до начала работы **желательна** консультация преподавателя.

ВАР. 21 .



Модель среды - кусочно-однородная. Цилиндрическая граница  $S$  ( $r=r_n$ ), разделяет области  $V_1$  и  $V_2$  с удельными электрическими сопротивлениями  $\rho_1$  и  $\rho_2$  соответственно. Задано однородное (всюду) первичное поле  $\mathbf{E}^0$  (поле в однородной среде с  $\rho=\rho_2$ ) по направлению которого на рис. ориентирована ось  $X$ .

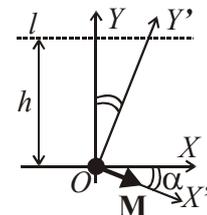
**Задание.**

- 1) Поставить и решить прямую задачу (как краевую задачу), определив потенциал  $U$  ( $\mathbf{E}=\mathbf{E}^0+\mathbf{E}^b=-\text{grad } U=-\text{grad } (U^0+U^b)$  в областях  $V_1, V_2$  (в цилиндрической системе координат).
- 2) Перейти к выражениям для  $U$  (в областях  $V_1$  и  $V_2$ ) в плоскости  $z=\text{const}$  в показанной на рис. декартовой системе координат.
- 3) Получить выражения для компоненты  $E_x^b$ .
- 4) На основе **численных расчётов** построить графики функций  $U^b(x), E_x^b(x)$  при  $y=-h$ .
- 5) Проанализировать результаты. Показать, как можно решить обратную задачу по способу характерных точек по графикам  $U^b(x), E_x^b(x)$  при  $y=-h$ . Сделать выводы о возможности решения обратной задачи при заданных параметрах модели.

**При численных расчётах:**  $E^0=50$  мВ/м,  $r_n=0.5$  м,  $h=2$  м,  $\rho_1=0.00001$  Ом·м,  $\rho_2=10$  Ом·м.

См. [5], задачу 19, задачу 3, рис. 3, д.

ВАР.55.



Источник постоянного магнитного поля  $\mathbf{H}, \mathbf{B}$  – расположенный в начале декартовых координат магнитный диполь с моментом  $\mathbf{M}$  по направлению оси  $X'$  (лежащим в плоскости  $z=0$ ). Потенциал  $U$  связан с полем  $\mathbf{H}$  равенством  $\mathbf{H}=-\text{grad } U$ . Поле  $\mathbf{B}=\mu_0 \cdot \mathbf{H}$ .

**Задание.**

- 1) Выразить потенциал  $U$  как функцию декартовых координат  $x', y', z$ , а затем - координат  $x, y, z$  точки наблюдения.
- 2) Получить выражения для декартовых компонент  $B_x, B_y$  поля  $\mathbf{B}$ .
- 3) Перейти к выражениям для  $U, B_x, B_y$  для случая, когда точка наблюдения лежит на параллельной оси  $X$  прямой  $l$  ( $z=0, y=h$ ).
- 4) На основе **численных расчётов** построить графики функций  $B_x(x), B_y(x)$  при  $z=0, y=h$  и при  $\alpha=0^\circ$  и  $\alpha=25^\circ$ .
- 5) Для случая, когда  $\alpha=0^\circ$ , показать, как можно решить обратную задачу (определить  $h$  и  $M$ ) по способу характерных точек по этим графикам. Сделать выводы о возможности решения обратной задачи при заданных параметрах модели.

**При численных расчётах:**  $M=10^5$  А·м<sup>2</sup>,  $h=200$  м. См. [5], задачу 5, задачу 3, рис. 3, д, рис. 5, выражение (19') + до начала работы **желательна** консультация преподавателя.

## Из приказа по МГРИ. Май 2019-го года

### **5 Требования к структуре и содержанию элементов курсовых работ (проектов)**

5.1 Структурными элементами курсовой работы (проекта) и выпускной квалификационной работы (далее - работы) являются:

- титульный лист; содержание; определения; обозначения и сокращения; введение; основная часть; заключение;
- список использованных источников; приложения.

5.2 Титульный лист является первым листом работы и оформляется для курсовой работы (проекта).

5.3 Содержание включает перечень структурных элементов работы с указанием наименований всех разделов, подразделов, пунктов и подпунктов основной части и номеров листов, с которых начинаются эти элементы.

5.6 Введение должно включать:

- *общую информацию о состоянии разработок по выбранной теме;*
- *обоснование актуальности и новизны темы, связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами;*
- *цель работы и решаемые задачи.*

Введение начинается с нового листа.

5.7 В основной части приводят данные, отражающие сущность, методику и основные результаты выполненной работы.

Основная часть обычно состоит из разделов. В конце каждого раздела рекомендуется делать выводы, которые должны быть краткими и содержать конкретную информацию о полученных результатах.

5.8 Заключение, как правило, должно содержать:

- основные результаты работы и краткие выводы по ним;
- оценку полноты решений поставленных задач;
- рекомендации по использованию результатов работы;

Заключение начинают с нового листа после изложения основной части работы.

5.9 Список использованных источников должен содержать сведения об источниках, которые применялись при подготовке работы.

### **6 Правила оформления курсовых работ (проектов),**

#### **6.1 Общие положения**

6.1.1 Курсовая работа (проект) должна быть выполнена с использованием компьютера и принтера на одной стороне листа белой бумаги формата А4 шрифтом Times New Roman через полтора интервала.

Цвет шрифта должен быть черным, высота цифр, букв и других знаков – размером 14 пт (кеглей). Выравнивание текста - по ширине.

Текст работы следует печатать, соблюдая следующие размеры полей: левое – 25 мм, правое – 15 мм, верхнее и нижнее – 20 мм.

Расчётно-графическая работа может быть выполнена как с использованием компьютера, так и от руки.

Объём курсовой работы (проекта), как правило, составляет не менее 10 страниц

6.1.3 Работа должна быть подписана исполнителем. Подпись и дата ставятся исполнителем после списка использованных источников.

Приложение А  
(обязательное)

**Форма титульного листа курсовой работы (проекта)**

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ СЕРГО ОРДЖОНИКИДЗЕ»**

Кафедра \_\_\_\_\_  
наименование кафедры

\_\_\_\_\_   
наименование темы работы полужирным шрифтом

**КУРСОВАЯ РАБОТА (ПРОЕКТ)**

студента (ки)                      курса                      группы

направления (специальности) \_\_\_\_\_  
код и наименование направления  
(специальности)

\_\_\_\_\_   
наименование факультета

\_\_\_\_\_   
фамилия, имя, отчество

**Руководитель**

\_\_\_\_\_   
должность, уч. степень, уч. звание

\_\_\_\_\_   
оценка, подпись, дата

\_\_\_\_\_   
инициалы, фамилия

**Зав. кафедрой**

\_\_\_\_\_   
должность, уч. степень, уч. звание

\_\_\_\_\_   
подпись, дата

\_\_\_\_\_   
инициалы, фамилия

Москва    20\_\_\_\_

\_\_\_\_\_