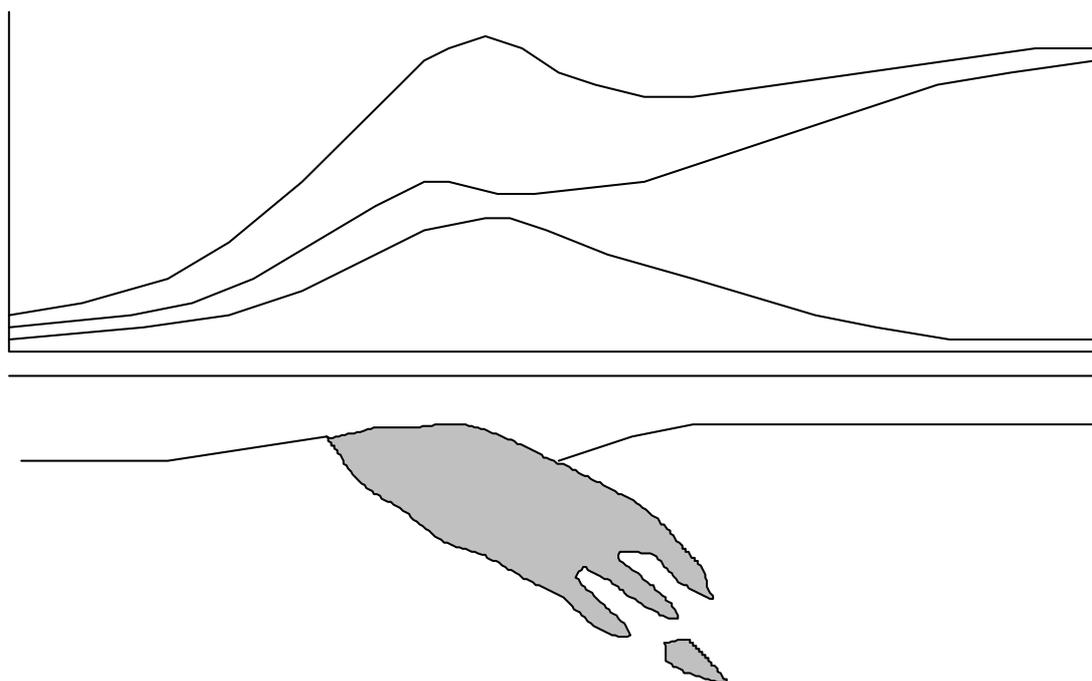


ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ
МОСКОВСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНАЯ
АКАДЕМИЯ

Ю. И. Блох

**ОБНАРУЖЕНИЕ И РАЗДЕЛЕНИЕ
ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ**



Москва
1995

УДК 550.831 + 550.838

Обнаружение и разделение гравитационных и магнитных аномалий. Учебное пособие / Ю.И.Блох. - М: МГГА. 1995. 80 с.

В учебном пособии по курсу "Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий" изложены особенности обратных задач гравиразведки и магниторазведки и основы их решения методами квазирешений и регуляризации. Рассмотрены геологически содержательные способы обнаружения и разделения потенциальных полей, трансформации и аппроксимационные методы.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности 08.02 "Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых".

Ил. 23. Табл. 3. Библиогр. 35 назв.

© Московская государственная
геологоразведочная академия, 1995 г.

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие написано в соответствии с программой курса "Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий", изучаемого студентами после освоения курсов "Гравиразведка" и "Магниторазведка". Оно предназначено студентам-геофизикам дневного, вечернего и заочного отделений академии.

В пособии рассматриваются основные задачи интерпретации, вопросы существования, единственности и устойчивости обратных задач, излагаются основы методов квазирешений и регуляризации. Основное содержание пособия связано с методами обнаружения и разделения гравитационных и магнитных аномалий. Здесь излагаются как теоретические вопросы, так и конкретные способы, широко применяющиеся на практике.

В настоящее время в решении задач обнаружения и разделения гравитационных и магнитных аномалий сложились два взаимодополняющих направления: детерминистское и вероятностно-статистическое. Детерминистское направление рассматривает исходные аномалии как потенциальные поля, осложненные помехами различного происхождения, и стремится при решении любых интерпретационных задач максимально учитывать физическую специфику интерпретируемой аномалии. Вероятностно-статистическое направление преимущественно ориентировано на обнаружение и выделение слабых аномалий и рассматривает исходные поля как случайные функции с некоторыми статистическими свойствами. Основные вероятностно-статистические методы вовсе никак не учитывают физическую специфику интерпретируемых полей и поэтому имеют универсальный характер. Настоящее пособие написано преимущественно в рамках детерминистского направления, но в нем кратко рассмотрен и ряд статистических способов выделения аномалий потенциальных полей. Детально изучить способы, характерные для вероятностно-статистического направления, студенты-геофизики смогут в рамках курса "Теоретические основы обработки геофизической информации".

Список литературы к пособию содержит основные монографии последних лет, включающие разделы, посвященные рассматриваемым задачам. Изучив пособие, читатель сможет с их помощью более глубоко разобраться в деталях применяемых способов обнаружения и разделения потенциальных полей.

ГЛАВА 1. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ГРАВИРАЗВЕДКИ И МАГНИТОРАЗВЕДКИ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ

Гравirazведка и магниторазведка применяются на практике для решения огромного количества разнообразных геологических задач, в связи с чем и задачи интерпретации гравитационных и магнитных аномалий также чрезвычайно разнообразны. Наиболее часто интерпретатору приходится решать задачи трех основных типов.

Первый тип геологических задач - это задачи обнаружения геологических объектов. В интерпретации им соответствуют задачи обнаружения аномалий от этих объектов. Иногда искомые аномалии столь велики по амплитуде и по размерам, что легко обнаруживаются не только по картам графиков аномальных полей, но даже и по картам изолиний. В этих случаях обнаружение может быть проведено визуально. Однако, многие имеющие практическую ценность геологические объекты создают небольшие аномалии, не проявляющиеся достаточно отчетливо на картах и не обнаруживаемые визуально из-за многочисленных помех геологического происхождения. Для обнаружения таких слабых аномалий и для их выделения на фоне помех разработаны многочисленные, преимущественно статистические способы, нуждающиеся в применении ЭВМ.

Второй тип интерпретационных задач - это задачи разделения аномалий и локализации интересующих объектов, способам решения которых посвящена большая часть настоящего пособия. Распространенность подобных задач определяется тем, что аномальные поля достаточно сложны и связаны с разными геологическими объектами, расположенными как на малых, так и на больших глубинах. При их интерпретации естественно попытаться осуществить декомпозицию, то есть разделить поля от объектов, получить по возможности аномалии от изолированных тел и свести тем самым сложную задачу к совокупности более простых. Необходимо отметить, что в общем виде такая задача не имеет решения, однако в частных постановках при достаточном объеме априорной информации подобные задачи могут успешно решаться.

Третий тип интерпретационных задач - это задачи детального количественного описания аномалий или, как их часто называют, задачи количественной интерпретации. Они заключаются в определении интерпретационной модели, удовлетворяющей как наблюдаемому полю, так и априорной геологической информации.

Приведенная классификация задач интерпретации отражает постановки решаемых геологических задач, а не применяемые методы. В связи с этим многие подхо-

ды к решению в задачах разного типа фактически одинаковы. Например, наиболее распространенные способы обнаружения аномалий базируются на применении приемов разделения полей. Некоторые алгоритмы, в частности, алгоритм аналитического продолжения, с успехом применяются при решении задач всех трех типов. Сложность и многоплановость практических интерпретационных задач привели к необходимости отработки основных приемов интерпретации гравитационных и магнитных аномалий на упрощенных моделях, для чего были введены так называемые теоретические обратные задачи гравиразведки и магниторазведки.

§ 2. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ И ИХ СВОЙСТВА

Обратные задачи составляют фундамент интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Они заключаются в определении местоположения, формы, размеров, элементов залегания и физических свойств интерпретационных моделей, удовлетворяющих имеющейся априорной информации, по создаваемым ими аномалиям.

Обратные задачи гравиразведки и магниторазведки подразделяют на теоретические и практические. Теоретические обратные задачи заключаются в нахождении интерпретационной модели по ее абсолютно точному полю, заданному на бесконечном множестве точек, называемом множеством единственности. При решении практических обратных задач приходится учитывать конечность числа наблюдений, ограниченность участка съемки и наличие помех. Таким образом, теоретические обратные задачи являются упрощенными моделями практических обратных задач, дающими возможность достаточно глубокого их анализа. Изучение теоретических обратных задач фактически привело не только к пониманию основных особенностей интерпретационного процесса, но и к разработке многих практически важных методов интерпретации. Далее, говоря об обратных задачах вообще, мы будем иметь в виду практические обратные задачи. Теоретические обратные задачи для краткости будем обозначать как ТОЗ.

Математически обратные задачи сводятся к решению операторных уравнений, при этом интерпретационные модели описываются как элементы некоторых метрических пространств. В ТОЗ в качестве интерпретационных моделей выступают функции, в то время как в практических обратных задачах они обычно определяются как многомерные векторы. Рассмотрим наиболее распространенную постановку практических обратных задач.

Пусть интерпретационная модель определяется n числами, называемыми параметрами. Некоторые из них описывают местоположение объектов, другие характеризуют их форму, размеры, элементы залегания и физические свойства. Упорядоченный список параметров соответствует многомерному вектору или координатам

точки в n -мерном евклидовом пространстве R^n . Обозначим эту точку как $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Очевидно, не любой набор параметров определяет существующий в природе объект. Приходится признать, что геологические объекты, описываемые этими параметрами, принадлежат множеству P , являющемуся лишь частью пространства R^n ($p \in P \subset R^n$). Обозначим через D оператор решения соответствующей прямой задачи. Применив его к какой-либо модели p , мы получим набор значений гравитационного или магнитного поля в m точках наблюдения. Этот набор значений поля также можно рассматривать как точку u в m -мерном евклидовом пространстве R^m : $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$. В операторной форме решение прямой задачи выглядит так:

$$u = Dp, \quad (2.1)$$

его можно трактовать как отображение точки $p \in P \subset R^n$ в пространство R^m . Если отобразить все точки $p \in P$ в это пространство, то в нем получится множество DP . В этих обозначениях решение обратной задачи представляет собой решение операторного уравнения

$$Dp = u, \quad (2.2)$$

то есть обратное отображение точки u в пространство R^n .

В определении обратных задач особо подчеркнута роль априорной информации при их решении. Фактически различный объем имеющейся до проведения интерпретации информации об одном и том же объекте является источником различных решений обратной задачи. В основе этого - фундаментальные свойства, характеристики обратных задач: существование, единственность и устойчивость их решений. Рассмотрим особенности этих характеристик.

Очевидно, всегда существует природный объект, создавший аномалию, обнаруженную в результате полевых геофизических работ. Вместе с тем, формальное решение уравнения (2.2) может и не существовать. Основанием для такого парадоксального вывода является наличие помех различного происхождения, осложняющих наблюдаемую аномалию.

Во-первых, это погрешности съемки, вызванные несовершенством применяемой при полевых исследованиях аппаратуры и методики. Эти помехи оцениваются в процессе съемки по результатам контрольных измерений, в результате чего интерпретатору известна их среднеквадратическая погрешность. Во-вторых, это помехи геологического происхождения, связанные с влиянием объектов, не представляющих непосредственного интереса для решения поставленной геологической задачи. Их можно отнести к трем основным группам. Первая группа - низкочастотные помехи, вызываемые глубокозалегающими частями Земли и называемые региональным фоном. Вторая группа - высокочастотные помехи, вызываемые неоднородностью верхней части изучаемого разреза. Третья группа - поля соседних объектов, прояв-

ляющиеся на изучаемом участке и не представляющие интереса для решаемой геологической задачи. Если соседние объекты известны, их поля можно учесть в процессе интерпретации. Источники и характер регионального фона иногда бывают известны интерпретатору по данным предшествующих геолого-геофизических работ, но чаще информация о них бывает только качественного характера. Свойства же высокочастотных помех в большинстве случаев являются совершенно неизвестными, что заставляет зачастую прибегать к рассмотрению этих помех как случайных и описывать их статистически. Наконец, в-третьих следует принимать во внимание и погрешности, вызванные округлением результатов съемки, то есть конечным числом значащих цифр в исходных числовых данных.

Следует признать, что помехи в исходных геофизических данных являются принципиально неустранимыми. Их нельзя полностью исключить никакими приемами, можно только несколько ослабить их влияние. Наличие же помех приводит к тому, что в большинстве случаев формальное решение обратных задач может не существовать. На рис. 1 приведена гравитационная аномалия, вызванная влиянием рудного тела в форме шара и осложненная высокочастотной помехой. Очевидно, не существует такого шара, который мог бы создать данную многоэкстремальную аномалию, следовательно, обратная задача определения параметров шара по аномальному полю в данном случае не имеет строгого решения.

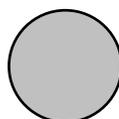
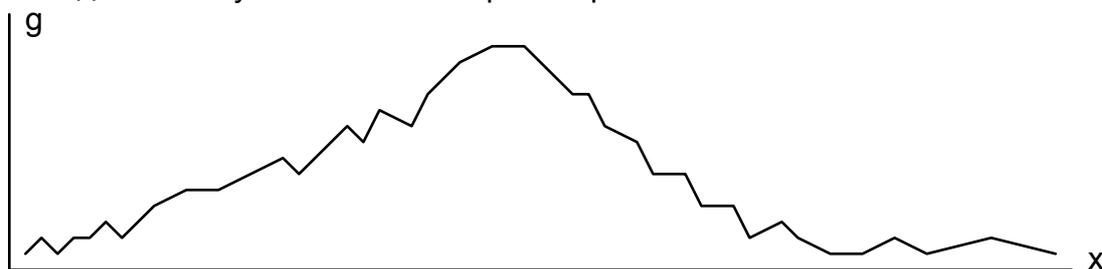


Рис. 1. Гравитационная аномалия, решение обратной задачи для которой в классе шаров не существует.

Математическая трактовка этого факта такова, Реальный объект, создающий интересующую нас часть аномалии, можно обозначить как p_T (точное решение). Его образ в R^m есть u_T , который непременно принадлежит множеству DP . Помехи приводят к тому, что вместо u_T в правую часть (2.2) приходится подставлять приближенное значение u_n , то есть решать вместо (2.2) уравнение

$$Dp = u_n. \tag{2.3}$$

Решение же этого уравнения существует не обязательно, поскольку u_n может не принадлежать множеству DP , то есть может не соответствовать ни одному из объектов множества P , что иллюстрирует рис. 2. В этих условиях требуется строго определить, что именно надо найти, решая уравнение (2.3). Различные определения приводят к разным методам, в том числе к методу квазирешений и методу регуляризации.

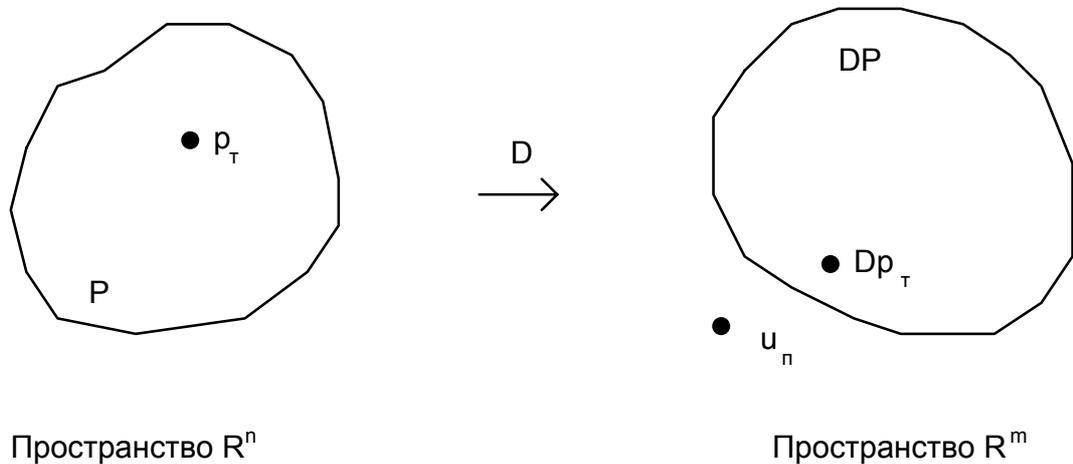


Рис. 2. Приближенное поле, не отвечающее ни одной из возможных моделей

Допустим, что решение обратной задачи существует. В этом случае возникает вопрос, является ли оно единственным? Под единственностью обычно понимают возможность однозначного нахождения источников по аномальному полю при определенных допущениях об этих источниках. Вообще говоря, разные обратные задачи могут иметь различные степени неединственности, поэтому принято различать сильную и слабую (параметрическую) единственность. Если задача имеет единственное решение при условии наличия лишь качественных допущений об источниках аномального поля, то такая единственность называется сильной. Если же для получения единственного решения помимо качественной априорной информации надо привлекать и количественную, то есть задавать заранее некоторые из параметров интерпретационной модели, то такая единственность называется слабой. Существование нескольких решений, соответствующих одному аномальному полю, называют эквивалентностью. Если поля моделей совпадают с абсолютной точностью во всем внешнем пространстве, то эти модели называют теоретически эквивалентными. Можно сказать, что теоретическая эквивалентность порождает отсутствие единственности решения обратных задач. В основе этого явления лежит существование распределений физических свойств, которые не порождают внешних аномальных полей.

Простейшим примером такого распределения в гравиразведке может служить шар объема V_1 с положительной избыточной плотностью σ_1 , окруженный концентри-

ческим ему сферическим слоем объема V_2 с отрицательной избыточной плотностью σ_2 . Если избыточная масса данного объекта - нулевая, то есть $\sigma_1 V_1 + \sigma_2 V_2 = 0$, то и его внешняя гравитационная аномалия также будет нулевой, поскольку каждое из составляющих тел создает поле, эквивалентное полю точечной массы в центре. Предположим, что в результате интерпретации каким-то образом построена плотностная модель, полностью объясняющая наблюдаемую сложную гравитационную аномалию от реального геологического объекта. Если на эту модель наложить данный неоднородный шар, то есть поточечно сложить избыточные плотности модели и шара, то получится другая модель, но ее поле также будет совпадать с наблюдаемым, поскольку поле добавленного шара - нулевое. Помещая центр шара в разные точки нижнего полупространства, мы получим бесконечное множество распределений плотности, объясняющих одну и ту же наблюдаемую аномалию.

То же явление имеет место и в магниторазведке. Например, шар объема V_1 с намагниченностью \bar{I}_1 , окруженный концентрическим ему сферическим слоем объема V_2 с намагниченностью \bar{I}_2 при условии равенства нулю суммарного магнитного момента $\bar{I}_1 V_1 + \bar{I}_2 V_2 = 0$ будет иметь нулевое внешнее магнитное поле, поскольку каждое из составляющих его тел создает поле, эквивалентное полю диполя в центре. Наложение такого объекта на любую модель не меняет ее аномального магнитного поля.

Подобных примеров как для гравитационного, так и для магнитного полей построено очень много. Для понимания вопросов единственности большое значение имеет так называемая лемма П.С.Новикова, в соответствии с которой распределение масс, ортогональное к произвольной гармонической функции, не порождает внешнего поля. Приведем ее формулировку полностью. Пусть V - конечный объем, ограниченный достаточно гладкой поверхностью S , и в нем задано распределение масс с плотностью $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$. Тогда, если для любой функции $U(\xi, \eta, \zeta)$, удовлетворяющей уравнению Лапласа $\Delta U = 0$ в объеме V и ограниченной на поверхности S , выполняется условие ортогональности

$$\int_V \sigma(\xi, \eta, \zeta) U(\xi, \eta, \zeta) dV = 0, \quad (2.4)$$

то данное распределение масс не порождает внешнего поля. Очевидно, множество таких распределений масс - бесконечно.

В связи с наличием столь широкой теоретической эквивалентности, на практике обычно используют достаточно узкие модельные классы, для которых имеет место единственность решения обратной задачи, хотя бы и слабая. Наиболее простым из них является класс так называемых "рудных" моделей, под которыми понимаются уединенные однородные замкнутые тела. Для разных объектов из этого класса степень неединственности решения обратных задач, вообще говоря, различна. Так

В.Н.Страхов и М.А.Бродский доказали единственность обратной задачи гравirazведки в классе однородных многогранников, гомеоморфных шару, то есть таких, которые могут быть трансформированы в шар непрерывным преобразованием. Вместе с тем, для однородных многоугольников в двумерной обратной задаче единственности решения нет. Для решения практических задач важно знать предельную степень неоднозначности в каждом классе. Это позволяет оценить минимальный объем априорной информации, требуемой для заведомого получения единственного решения для любых объектов из этого класса.

Проведенные многими геофизиками исследования показали, что для обратной задачи гравirazведки в классе уединенных однородных замкнутых тел предельно возможна **однопараметрическая неоднозначность**. Это значит, что для получения единственного решения в данном классе **необходимо** иметь следующий объем априорной информации:

- 1) качественную информацию о том, что интерпретируемая аномалия создается уединенным однородным замкнутым телом;
- 2) количественную информацию об **одном** из параметров, например о плотности тела или о расположении одной из точек его границы.

Достаточные условия единственности в этом классе дает теорема П.С.Новикова. Он доказал, что решение обратной задачи гравirazведки единственно в классе уединенных однородных замкнутых тел с известной постоянной избыточной плотностью, звездных относительно заданной точки. Звездным относительно внутренней точки называется тело, если любой луч, проведенный из данной точки, пересекает поверхность тела лишь единожды. Значение этой теоремы велико, поскольку именно к такому классу относятся многие распространенные модели геологических объектов, в том числе, пласты.

Эти результаты могут быть распространены и на обратную задачу магниторазведки. Отличия связаны лишь с тем, что плотность является скаляром, в то время как намагниченность - это вектор. Поэтому для двумерных обратных задач магниторазведки, где намагниченность описывается двумя компонентами, неоднозначность становится двухпараметрической, а для трехмерных обратных задач магниторазведки, соответственно, трехпараметрической. Аналогичное увеличение степени неединственности решения обратной задачи магниторазведки по сравнению с обратной задачей гравirazведки справедливо и в других классах.

Необходимо отметить, что если физические свойства не заданы, всегда можно построить бесконечное семейство тел, создающих эквивалентные внешние поля - так называемое эквивалентное семейство. Случай с многогранником отличается лишь тем, что другие тела в этом эквивалентном семействе - не многогранники, а имеющие гладкие границы. Вообще говоря, при стремлении избыточной плотности

или намагниченности к нулю, тела в любых эквивалентных семействах "рудного" класса, увеличиваясь в размерах, стремятся по форме к шару. Этот факт вытекает из условия регулярности потенциала на бесконечности и строго доказан В.К.Ивановым.

Более сложным классом единственности является класс так называемых "структурных" моделей, под которыми понимают разрезы с несколькими субгоризонтальными поверхностями раздела сред, характерные для платформенных условий. Рассмотрим вначале наиболее простой подкласс с единственной контактной поверхностью, разделяющей однородные среды. Даже для него степень неоднозначности решения обратных задач выше, чем для замкнутых тел. В.Н.Страхов доказал наличие двупараметрической неоднозначности решения двумерной обратной задачи гравиразведки для контактной поверхности в форме конхоиды Слюза, то есть алгебраической кривой третьей степени с уравнением:

$$(z - a)(x^2 + z^2) = 2rz^2. \tag{2.5}$$

Это уравнение характеризуется двумя параметрами: a и r , геометрический смысл которых иллюстрирует следующий рисунок.

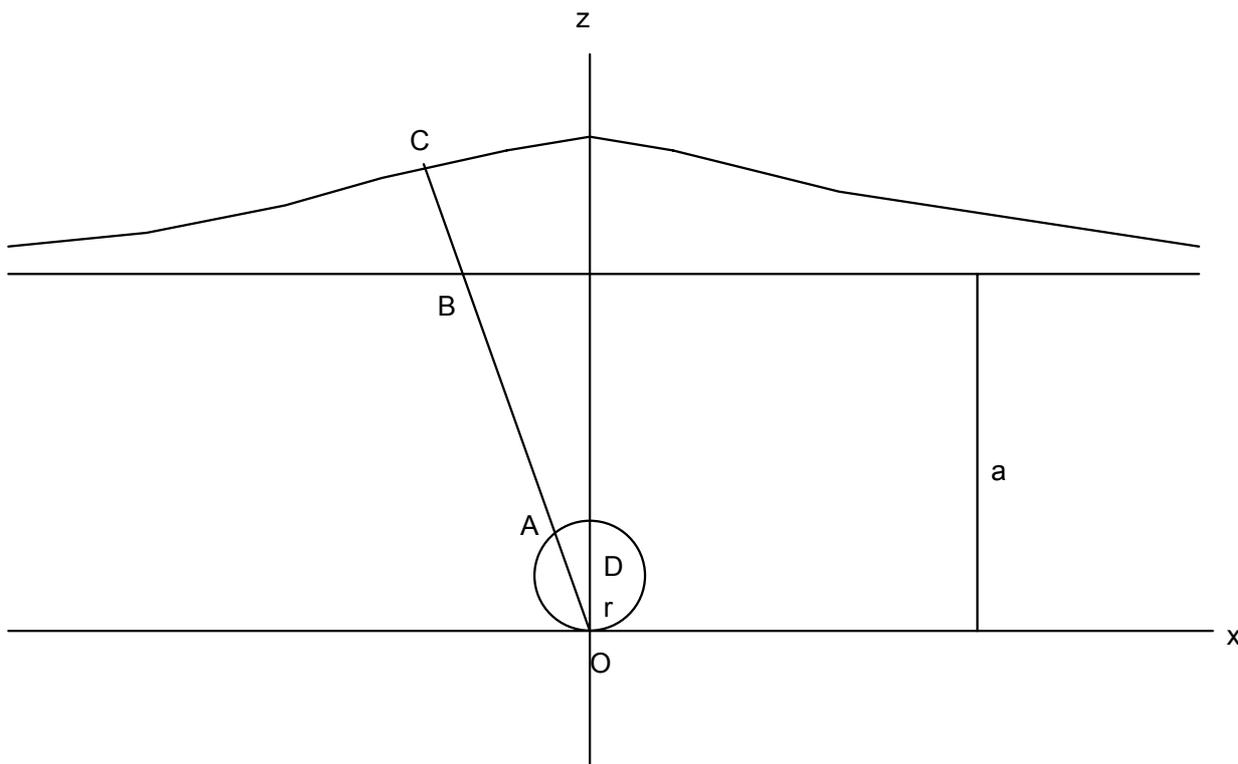


Рис. 3. Контактная поверхность в форме конхоиды Слюза

Он же поясняет способ построения конхоиды. Проведем окружность радиуса r , центр которой поместим в точку D на ось Oz так, чтобы она касалась оси Ox . Эта окружность называется производящей окружностью конхоиды. Далее проведем из на-

чала координат произвольный луч, пересекающий окружность в точке А, а асимптоту конхоиды, параллельную оси Ох и отстоящую от нее на расстояние a , в точке В. Если отрезок ОА отложить вдоль луча от точки В ($СВ=АО$), то конец этого луча - точка С будет принадлежать конхоиде. В.Н.Страхов доказал, что гравитационная аномалия конхоиды теоретически эквивалентна полю линейной массы, проходящей через точку D - центр производящей окружности конхоиды. Таким образом, полю одной и той же линейной массы могут быть эквивалентны поля не только круговых цилиндров, но и поля контактных поверхностей в форме конхоиды, причем от каждой из вышележащих асимптот их можно построить бесконечно много.

Из последнего примера вытекает ряд важных выводов. Во-первых, надо признать, что в общем случае по аномальному полю нельзя однозначно сделать вывод о том, чем вызвана аномалия: замкнутым телом или контактной поверхностью. Во-вторых, если даже эта качественная априорная информация имеется, для построения единственной контактной поверхности надо располагать и количественной априорной информацией о нескольких параметрах. Для случая гравиразведки таких параметров требуется два: избыточная плотность на границе и глубина одной из ее точек, либо же глубина двух точек. Для магниторазведки потребность в известных параметрах возрастает в силу векторного характера намагниченности. В-третьих, линейной массе может быть эквивалентен разрез, в котором есть несколько контактных поверхностей в форме конхоиды Слюза. При этом по полю невозможно однозначно определить даже количества контактных поверхностей в разрезе. Наконец, в-четвертых, можно построить разрез из двух эквивалентных конхоид, не порождающий внешнего аномального поля, для чего достаточно, чтобы избыточные плотности были разных знаков. Последний вывод можно распространить на большее число границ.

Таким образом, в общем случае обратные задачи не имеют единственного решения, поскольку существуют теоретически эквивалентные модели. Еще гораздо шире развита так называемая **практическая эквивалентность**, когда разные модели создают очень близкие, но не абсолютно совпадающие внешние поля. Практическая эквивалентность, которую еще иногда называют ε -эквивалентностью, продуцирует **неустойчивость** решения обратных задач.

Устойчивой называют такую задачу, решение которой непрерывно зависит от исходных данных. Прежде, чем дать строгое определение, необходимо напомнить, что норма n -мерного евклидова пространства R^n определяется как модуль n -мерного вектора (p_1, p_2, \dots, p_n) , то есть

$$\|p\|_{R^n} = \left[\sum_{k=1}^n p_k^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.6)$$

Тогда, применительно к рассматриваемой постановке практических обратных задач, математическое определение устойчивости может быть дано следующим образом. Задача определения модели $p \in R^n$ по исходным данным $u \in R^m$ называется устойчивой на пространствах (R^n, R^m) , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\|u_2 - u_1\|_{R^m} \leq \delta(\varepsilon)$ следует $\|p_2 - p_1\|_{R^n} \leq \varepsilon$, где $u_1 = Dp_1$ и $u_2 = Dp_2$.

Вообще говоря, обратным задачам всех методов геофизики присуща неустойчивость даже в тех модельных классах, где имеет место единственность их решения. С практической эквивалентностью в отличие от теоретической можно конструктивно бороться, повышая точность съемки, сгущая сети наблюдений и расширяя площадь исследований. Важнейшее значение имеет применение устойчивых методов интерпретации, позволяющих ослабить влияние помех.

В начале нашего века Ж.Адамар ввел понятие о корректных и некорректных задачах математической физики. Применительно к рассматриваемым обратным задачам, корректность по Адамару может быть сформулирована следующим образом. Задача определения модели $p \in R^n$ по исходным данным $u \in R^m$ называется корректно поставленной на паре евклидовых пространств (R^n, R^m) , если удовлетворяются следующие требования:

- 1) для всякого $u \in R^m$ существует решение $p \in R^n$;
- 2) решение определяется однозначно;
- 3) задача устойчива на пространствах (R^n, R^m) .

Если задача не удовлетворяет всем этим требованиям, то она называется некорректно поставленной по Адамару.

Возможность решения некорректно поставленных задач базируется на привлечении дополнительной информации. Если имеется количественная априорная информация, позволяющая сузить класс возможных моделей до компактного множества, то для получения устойчивого результата можно применить метод квазирешений. Если такой информации нет, но есть качественная априорная информация о модели, например о гладкости ее границ раздела, то может применяться метод регуляризации.

§ 3. КВАЗИРЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Наличие помех геологического происхождения, преимущественно связанных с неоднородностью верхней части изучаемого разреза, приводит к тому, что в большинстве случаев формальное решение обратных задач не существует. В этих условиях необходимо строго определить, что именно требуется найти в результате их решения. Для большинства интерпретационных задач таким результатом является **квазирешение**. Это понятие введено В.К.Ивановым.

Как было отмечено в § 2, решение операторного уравнения (2.3) может не существовать из-за помех, благодаря которым точка u_{Π} , характеризующая исходные данные, может не принадлежать множеству $DP \in R^m$, то есть может не соответствовать ни одному из объектов множества возможных моделей $P \in R^n$. В этом случае в качестве квазирешения уравнения (2.3) предложено считать такую точку $p \in P \subset R^n$, образ которой $u \in DP \subset R^m$ находится на минимальном расстоянии от u_{Π} . Назовем **невязкой** операторного уравнения $Dp = u$ следующую норму разности: $\|u - Dp\|_{R^m}$. В этих обозначениях квазирешением уравнения $Dp = u$ на множестве $P \in R^n$ называется модель $p \in P \subset R^n$, минимизирующая невязку этого уравнения по норме пространства R^m :

$$\|u - Dp\|_{R^m} = \min. \quad (3.1)$$

Обратим внимание на то, что определяется не абстрактное квазирешение, а квазирешение на конкретном множестве P . В геофизических терминах это значит, что ищется квазирешение на множестве шаров, либо квазирешение на множестве призм, либо квазирешение на множестве контактных поверхностей и т. п. Технологически удобнее искать решение не уравнения (3.1), а его естественного аналога

$$\|u - Dp\|_{R^m}^2 = \min. \quad (3.2)$$

С учетом (2.6) мы фактически приходим к одной из разновидностей метода подбора, называемой методом наименьших квадратов.

Очевидно, метод квазирешений не является всеобъемлющим - с его помощью можно решать лишь ограниченный круг задач. Ответ на вопрос, какие это задачи, дан В.К.Ивановым. Им доказана теорема, суть которой состоит в том, что если множество искомых моделей - компактно в R^n , то при стремлении невязки к нулю квазирешение стремится к точному решению p_T . Другими словами, если уменьшать помеху до нуля, то квазирешение, получаемое методом подбора на некотором множестве моделей, будет стремиться к точному решению лишь тогда, когда это множество компактно в R^n . Напомним, что множество $P \in R^n$ называется **компактным** в R^n , если из всякой последовательности его элементов можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу того же множества P . Множество P компактно в R^n тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено, то есть когда все параметры модели изменяются в конечных пределах. Это, вообще говоря, естественно для многих обратных задач гравиразведки и магниторазведки, что и объясняет причины популярности метода подбора.

Практически задача нахождения приближенного квазирешения на компактном множестве в пространстве R^n заключается в нахождении минимума функции n переменных, каковыми являются искомые параметры. Вид минимизируемой функции

$\Phi(p_1, p_2, \dots, p_n)$ определяется условием (3.2), которое в развернутом виде может быть записано следующим образом:

$$\Phi(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{k=1}^m \left[u_k - u_{mk}(p_1, p_2, \dots, p_n) \right]^2 = \min, \quad (3.3)$$

где u_k и u_{mk} - соответственно наблюдаемое поле и поле модели в k -ой точке наблюдения.

В зависимости от характера решаемой задачи выделяют линейные, линеаризованные и нелинейные задачи подбора. При обнаружении и разделении аномалий основное значение имеют линейные и отчасти линеаризованные задачи, в то время как нелинейные задачи являются преобладающими при детальном количественном описании аномалий.

Линейные задачи отличаются тем, что оператор D решения прямой задачи в них фактически является прямоугольной матрицей A , имеющей m строк и n столбцов. Модель p и исходные данные u при этом понимаются как векторы-столбцы, имеющие соответственно n и m элементов. Предположим, что интерпретируемое поле u в k -ой точке с координатами (x_k, y_k, z_k) может быть представлено в следующей форме:

$$u(x_k, y_k, z_k) = p_1 \Gamma_1(x_k, y_k, z_k) + \dots + p_n \Gamma_n(x_k, y_k, z_k), \quad (3.4)$$

где $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ - известные значения, характеризующие в k -ой точке вклад соответствующих параметров. Квазирешение данной задачи может быть найдено путем минимизации квадрата невязки, записанной в виде

$$\Phi(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{k=1}^m \left[u(x_k, y_k, z_k) - \sum_{i=1}^n p_i \Gamma_i(x_k, y_k, z_k) \right]^2 = \min. \quad (3.5)$$

При этом в силу линейности оператора прямой задачи определение искомых параметров в вычислительном плане сводится к решению достаточно проработанных проблем линейной алгебры.

Наиболее распространенной при решении линейных обратных задач является ситуация, когда число точек наблюдения превышает число искомых параметров, в результате чего поиск квазирешения сводится к устойчивому решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений. Для минимизации можно воспользоваться необходимыми условиями экстремума функции многих переменных, которые, как известно, заключаются в равенстве нулю частных производных по всем переменным. Запишем эти условия, обозначив выражение в квадратных скобках формулы (3.5) как R :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} = \sum_{k=1}^m R \Gamma_1(x_k, y_k, z_k) = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_2} = \sum_{k=1}^m R\Gamma_2(x_k, y_k, z_k) = 0,$$

.....

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_n} = \sum_{k=1}^m R\Gamma_n(x_k, y_k, z_k) = 0.$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений называется **системой нормальных уравнений** или системой уравнений Эйлера. Она может быть переписана более подробно, при этом для краткости опустим пределы суммирования по k , а также аргументы функций Γ и обозначим $u_k = u(x_k, y_k, z_k)$:

$$\begin{aligned} p_1 \sum \Gamma_1^2 + p_2 \sum \Gamma_1 \Gamma_2 + p_3 \sum \Gamma_1 \Gamma_3 + \dots + p_n \sum \Gamma_1 \Gamma_n &= \sum \Gamma_1 u_k \\ p_1 \sum \Gamma_2 \Gamma_1 + p_2 \sum \Gamma_2^2 + p_3 \sum \Gamma_2 \Gamma_3 + \dots + p_n \sum \Gamma_2 \Gamma_n &= \sum \Gamma_2 u_k \\ p_1 \sum \Gamma_3 \Gamma_1 + p_2 \sum \Gamma_3 \Gamma_2 + p_3 \sum \Gamma_3^2 + \dots + p_n \sum \Gamma_3 \Gamma_n &= \sum \Gamma_3 u_k \\ \dots & \dots \\ p_1 \sum \Gamma_n \Gamma_1 + p_2 \sum \Gamma_n \Gamma_2 + p_3 \sum \Gamma_n \Gamma_3 + \dots + p_n \sum \Gamma_n^2 &= \sum \Gamma_n u_k \end{aligned} \quad (3.6)$$

Матрица коэффициентов системы является симметричной, на ее главной диагонали расположены заведомо положительные числа. Решая систему стандартными методами, например, методом исключения Гаусса, получим значения искоемых параметров.

К решению этой задачи можно подойти по-другому: как к решению следующей переопределенной ($m > n$) системы линейных уравнений относительно тех же параметров:

$$\begin{aligned} p_1 \Gamma_1(x_1, y_1, z_1) + \dots + p_n \Gamma_n(x_1, y_1, z_1) &= u(x_1, y_1, z_1), \\ p_1 \Gamma_1(x_2, y_2, z_2) + \dots + p_n \Gamma_n(x_2, y_2, z_2) &= u(x_2, y_2, z_2), \\ \dots & \dots \\ p_1 \Gamma_1(x_k, y_k, z_k) + \dots + p_n \Gamma_n(x_k, y_k, z_k) &= u(x_k, y_k, z_k), \\ \dots & \dots \\ p_1 \Gamma_1(x_m, y_m, z_m) + \dots + p_n \Gamma_n(x_m, y_m, z_m) &= u(x_m, y_m, z_m). \end{aligned} \quad (3.7)$$

В общем случае определение n параметров по m точкам наблюдения также можно свести к решению системы линейных алгебраических уравнений:

$$Ap = u, \quad (3.8)$$

где \mathbf{A} -прямоугольная матрица размерами $m \times n$. Для ее решения надо умножить обе части матричного уравнения слева на матрицу \mathbf{A}^T , транспонированную к матрице \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{p} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}. \quad (3.9)$$

Напомним, что транспонированной называется матрица, являющаяся отражением исходной относительно главной диагонали, то есть строки матрицы \mathbf{A} являются столбцами матрицы \mathbf{A}^T и наоборот. Матрица $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ является квадратной, симметричной и имеющей размеры $n \times n$. Легко убедиться, что система (3.9) совпадает с системой нормальных уравнений (3.6), полученной путем минимизации невязки. Таким образом, оба рассмотренных подхода приводят к решению одной и той же системы линейных алгебраических уравнений.

§ 4. ОСНОВЫ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Рассмотренные методы применимы для получения квазирешения исключительно в тех случаях, когда множество возможных решений \mathbf{P} является компактным в пространстве \mathbb{R}^n . Однако, для ряда задач, в том числе и для задач обнаружения и разделения аномалий, множество возможных решений может и не быть компактным. Вообще говоря, метод квазирешений дает достаточно хорошие результаты лишь тогда, когда число определяемых параметров невелико, а они не коррелируют друг с другом, чтобы не проявлялись компенсационные эффекты. Тогда, когда число искомым параметров велико, а интерпретационная модель становится настолько гибкой, чтобы подбирать не только интересующую часть поля, но и помеху, метод квазирешений начинает приводить к неустойчивым и неестественным результатам. Такие задачи называют существенно некорректными, и для них метод подбора - не применим. В 1963 году А.Н.Тихонов предложил для их решения метод регуляризации, в основу которого положено понятие регуляризирующего оператора.

В § 2 мы уже отмечали, что решение операторного уравнения $\mathbf{D} \mathbf{p} = \mathbf{u}$, у которого вместо точного значения правой части известно лишь приближенное, может и не существовать в классическом смысле. Пусть вместо точного \mathbf{u}_T известно такое приближенное значение \mathbf{u}_δ , для которого

$$\|\mathbf{u}_T - \mathbf{u}_\delta\|_{\mathbb{R}^m} \leq \delta \quad (4.1)$$

Числовой параметр δ характеризует погрешность правой части уравнения, поэтому представляется целесообразным находить приближенное решение \mathbf{p}_δ с помощью такого оператора, зависящего от параметра, значения которого согласуются с погрешностью δ . Другими словами, естественно потребовать, чтобы та часть поля, которая связана с изучаемым геологическим объектом, воспроизводилась полем модели, а помеха при этом игнорировалась. При $\delta \rightarrow 0$, то есть при стремлении \mathbf{u}_δ к \mathbf{u}_T

по норме пространства R^m , приближенное решение p_δ должно стремиться к точному решению p_T по норме пространства R^n .

Хотя понятие регуляризирующего оператора сформулировано А.Н.Тихоновым для любых метрических пространств, мы далее, как и во всем пособии, будем рассматривать лишь конечномерные евклидовы пространства, наиболее важные с точки зрения практики решения обратных задач.

Оператор $R(u, \alpha)$, зависящий от параметра α , называется регуляризирующим для операторного уравнения $Dp = u$, если он обладает следующими свойствами:

- 1) оператор определен для всякого $\alpha > 0$ и любого u из пространства R^m ;
- 2) если $Dp_T = u_T$, то существует такое $\alpha(\delta)$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что если

$$\|u_T - u_\delta\|_{R^m} \leq \delta(\varepsilon), \quad (4.2)$$

то

$$\|p_T - p_\alpha\|_{R^n} \leq \varepsilon, \quad (4.3)$$

где

$$p_\alpha = R(u_\delta, \alpha) \quad (4.4)$$

и $\alpha = \alpha(\delta)$.

Решение, получаемое по формуле (4.4), при α , согласованном с погрешностью определения аномального поля δ , называется регуляризованным решением обратной задачи, а числовой параметр α - параметром регуляризации. Фактически регуляризованное решение является искомым приближенным решением обратной задачи.

Таким образом, получение приближенного решения обратной задачи, устойчивого к помехам в наблюдаемых полях, сводится по А.Н.Тихонову к следующим двум этапам:

- 1) к построению регуляризирующего оператора;
- 2) к определению параметра регуляризации по априорной информации.

Этот метод построения приближенных решений и носит название метода регуляризации.

Построение регуляризирующего оператора возможно при наличии качественной априорной информации о решении. Например, можно потребовать, чтобы искомое приближенное решение оказалось гладким, наименее уклоняющимся от начальной модели и т.п. Эту информацию формулируют в виде вариационного принципа отбора возможных решений обратной задачи. Для этого составляют функцию $\Omega[p]$, называемую **стабилизатором**, которая должна обладать следующими свойствами:

1) элемент p_T , представляющий точное решение обратной задачи, должен принадлежать области его определения P_1 , являющейся подмножеством множества допустимых моделей P , всюду плотным в P ;

2) для всякого числа $d > 0$ подмножество P_d элементов $p \in P_1$, для которых $\Omega[p] \leq d$, является компактным в P .

Выбор стабилизатора - неоднозначен и определяется характером решаемой задачи. Например, если модель получается негладкой, ее надо регуляризовать, минимизируя стабилизатор, характеризующий меру негладкости. Фактически стабилизатор является штрафом, который интерпретатор накладывает на решение за его нежелательные свойства, в том числе и негладкость. Эти нежелательные свойства обычно проявляются в процессе численных экспериментов по решению обратных задач для известных моделей, либо при попытке решить конкретную обратную задачу методом квазирешений. После их выявления и выбора необходимого стабилизатора получение устойчивого решения сводится к решению следующей условно-экстремальной задачи: найти элемент p_δ , минимизирующий стабилизатор при условии, что невязка не превышает заданной величины δ , характеризующей норму помехи. Математически это выглядит так:

$$\begin{aligned} \Omega[p] = \min, \\ \|u - u_\delta\|_{R^m} \leq \delta. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Найденную модель p_δ можно рассматривать как результат применения регуляризующего оператора.

Для решения условно-экстремальных задач в вариационном исчислении разработан специальный метод, называемый методом неопределенных множителей Лагранжа. Он дает возможность свести условно-экстремальную задачу с ограничением в форме равенства к безусловно-экстремальной задаче. Поясним его применение на простом примере, при этом заметим, что максимумы и минимумы функций ищутся однотипно. Действительно, в точке, где $f(x)$ имеет минимум, $-f(x)$ будет иметь максимум.

Пусть требуется найти стороны прямоугольника максимальной площади, вписанного в окружность с уравнением $x^2 + y^2 = r^2$. Поскольку площадь прямоугольника можно представить в виде $4xy$, задача сводится к нахождению максимума функции

$$f(x, y) = 4xy \quad (4.6)$$

при условии

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0. \quad (4.7)$$

В этом примере, конечно, можно выразить y через x и подставить в максимизируемую функцию, но для реальных задач это зачастую невозможно или затруднительно. Тогда составляют функцию

$$F(x, y) = \varphi(x, y) + \alpha f(x, y), \quad (4.8)$$

где α - неопределенный множитель, и находят искомые параметры из необходимых условий экстремума функции F , другими словами, из системы уравнений Эйлера и условия $\varphi(x, y) = 0$. В нашем примере

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 + 4\alpha xy. \quad (4.9)$$

Дифференцируя эту функцию по x и по y и приравнивая производные нулю, получаем совместно с (4.7) систему

$$\begin{aligned} 2x + 4\alpha y &= 0, \\ 2y + 4\alpha x &= 0, \\ x^2 + y^2 - r^2 &= 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

откуда следует, что искомый минимум дает квадрат, то есть $x = y = r / \sqrt{2}$ и $\alpha = -0,5$.

А.Н.Тихонов доказал, что если метод Лагранжа реализуем для решения исходной условно-экстремальной задачи (4.5), то есть существует такой неопределенный множитель α , при котором

$$\|Dp - u_{\delta}\|_{R^m} = \delta, \quad (4.11)$$

то задача (4.5) оказывается эквивалентной безусловно-экстремальной задаче поиска минимума следующей функции, которую называют функцией Тихонова:

$$M^{\alpha}[u_{\delta}, p] = \|Dp - u_{\delta}\|_{R^m}^2 + \alpha\Omega[p] \quad (4.12)$$

Неопределенный множитель α здесь является параметром регуляризации. Таким образом, метод регуляризации сводится к решению задачи

$$\|Dp - u_{\delta}\|_{R^m}^2 + \alpha\Omega[p] = \min \quad (4.13)$$

и оценке α , согласуемого с погрешностью исходных данных.

Рассмотрим качественно влияние параметра α на результаты минимизации. Если $\alpha=0$, то, чему бы ни был равен стабилизатор, он не оказывает никакого влияния на решение обратной задачи. Подставив это значение в (4.13), легко убедиться, что в данном случае результаты метода регуляризации полностью совпадут с результатами метода квазирешений. Можно сказать, что метод квазирешений есть частный случай метода регуляризации, когда параметр регуляризации - нулевой. Пусть теперь α достаточно велико - тогда минимум функции Тихонова будет определяться лишь минимумом стабилизатора. Поскольку $\Omega[p]$ является своеобразным штрафом, налагаемым на решение за его нежелательные свойства, метод регуляризации при этом будет давать результаты, полностью удовлетворяющие критерию качества, но игнорирующие наблюдаемое поле.

Из изложенного следует, что надо подбирать такую величину параметра регуляризации, которая бы оптимально удовлетворяла обоим условиям в (4.5). Это можно сделать, организовав специальным способом перебор значений α . Практически для выбора оптимального параметра регуляризации используется последовательность его значений в виде убывающей геометрической прогрессии:

$$\alpha_{k+1} = \mu\alpha_k. \quad (4.14)$$

Начальное значение α определяется характером задачи; можно без потери общности считать, что $\alpha_0 = 1$. Величину $\mu < 1$ обычно полагают равной 0,1. Если параметр α фиксирован, решение задачи (4.13) становится решением обычной задачи подбора. В итоге применение метода регуляризации сводится к многократному решению задачи подбора и выбору оптимального параметра регуляризации, исходя из некоторых критериев.

При решении обратных задач встречаются две ситуации, различающиеся тем, известна ли норма помехи δ в исходных данных или нет. Если она известна, то выбор регуляризованного решения p_δ осуществляется по так называемому критерию невязки:

$$\|Dp - u_\delta\|_{R^m} = \delta. \quad (4.15)$$

Это значит, что, перебирая различные значения параметра регуляризации α , надо следить за получаемой невязкой и выбирать в качестве оптимальной такую модель, поле которой воспроизводит интересующую часть аномалии и игнорирует помеху. Чаще, однако, δ бывает неизвестной. Дело в том, что большая часть помехи - это помеха геологического происхождения, связанная с неоднородностью верхней части разреза и с влиянием объектов, не учитываемых в модели. Эти же источники помех лишь в редких случаях доступны анализу и оценке.

Если норма помехи не известна, то для выбора параметра регуляризации применяют квазиоптимальный критерий, предложенный А.Н.Тихоновым и В.Б.Гласко. В соответствии с ним, выбираться должно такое значение параметра регуляризации $\alpha > 0$, которое минимизирует следующую норму:

$$\left\| \alpha \frac{dp_\alpha}{d\alpha} \right\|_{R^n} = \min. \quad (4.16)$$

Если таких значений несколько, в качестве квазиоптимального берут наименьшее из них. Практически при использовании данного критерия следят за изменением параметров модели при изменении параметра регуляризации по закону (4.14) и в качестве регуляризованного решения выбирают такое, для которого такое изменение - минимально. Это критерий обоснован теоретически лишь для некоторых классов задач, но получил весьма широкое распространение на практике. Иногда квазиоптимальный критерий по имени авторов называют критерием Тихонова-Гласко.

В настоящей главе рассмотрены лишь основы методов квазирешений и регуляризации, требуемые при решении задач обнаружения и разделения гравитационных и магнитных аномалий. Фактические их возможности в наибольшей мере проявляются при решении задач количественной интерпретации, которые требуют специального рассмотрения.

ГЛАВА 2. ГЕОЛОГИЧЕСКИ СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ СПОСОБЫ ОБНАРУЖЕНИЯ И РАЗДЕЛЕНИЯ АНОМАЛИЙ

§ 5. ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К ОБНАРУЖЕНИЮ АНОМАЛИЙ

Результаты площадных гравиметрических и магнитометрических съемок представляют в виде карт графиков либо карт соответствующих изолиний. Для данных гравиразведки это обычно карты изоаномал силы тяжести в редукции Буге, для данных магниторазведки - карты изодинам ΔT или ΔZ . Результаты профильных и маршрутных съемок изображают в виде графиков измеряемых элементов полей. Первая из задач, решаемых интерпретатором при геологическом истолковании полученных результатов, состоит в обнаружении на этих картах и графиках достоверных аномалий и их классификации. Эта задача может решаться по-разному в зависимости от конкретных геологических условий, для чего разработаны многочисленные методы. Вместе с тем, в любых условиях вначале производится визуальное обнаружение аномалий и лишь, если уровень помех оказывается столь большим, что визуальное обнаружение оказывается невозможным, интерпретатору приходится прибегать к аналитическим методам обнаружения с применением ЭВМ.

Визуальное обнаружение аномалий осуществляется в рамках процедуры, называемой **морфологическим анализом карт и графиков** и включающей два этапа. Первый этап - это оценка достоверности интерпретируемых материалов. При ее проведении надо иметь в виду, что полевые гравиметрические и магнитометрические съемки являются довольно дорогостоящими. Чтобы оправдать их проведение, в процессе интерпретации должна быть максимально выявлена вся содержащаяся в картах и графиках геологическая информация. Это в частности значит, что интерпретатор обязан обнаружить на картах и графиках **все достоверные аномалии**. В геофизике принято различать ошибки двух родов. **Ошибка первого рода - это ошибка пропуска объекта, а ошибка второго рода - ошибка его ложного обнаружения**. Очевидно, ошибка первого рода наносит гораздо больший вред, поскольку пропущенная аномалия фактически означает потерю возможности обнаружения месторождения, рудного тела и т. п. Таким образом, если у интерпретатора нет полной уверенности в недостоверности какой-либо из аномалий, он должен показывать ее на отчетных схемах. Конечно, ежели есть возможность заверки данной аномалии, надо провести дополнительные измерения. Когда возможности проверки нет, такую аномалию на схемах целесообразно помечать как сомнительно достоверную.

Недостоверными считаются одноточечные, однопрофильные и одномаршрутные аномалии, которые могут появиться как результат случайных ошибок оператора на рядовых или опорных пунктах, либо погрешностей прибора. Инструкция по грави-

разведке устанавливает несколько критериев достоверности. Аномалия силы тяжести считается достоверной, если она выделена не менее, чем на трех пунктах различных звеньев и имеет амплитуду, не меньшую сечения изоаномал отчетной карты. В случае корреляции более слабых аномалий на трех и более профилях, они также относятся к достоверным. При обнаружении аномалий по результатам профильной съемки, они считаются достоверными, если подтверждаются тремя и более проконтролированными пунктами. Близкие требования к достоверности аномалий выдвигает и инструкция по магниторазведке. Обнаруживаемую визуально аномалию полагают достоверной, если она отмечается не менее, чем по трем соседним точкам, значения поля в которых превышают не менее, чем в 3 раза среднеквадратическую погрешность съемки. Для характеристики достоверности более слабых аномалий, обнаруживаемых аналитическими способами, предложены разнообразные статистические критерии.

Второй этап морфологического анализа состоит в обнаружении и классификации региональных и локальных аномалий. **Региональная аномалия** обычно занимает сравнительно большую часть площади исследований и совпадает в плане с одним из крупных геологических структурных элементов. Нередки случаи, когда региональная аномалия выходит и за пределы площади исследований. Границы площадных региональных аномалий обычно связаны с разломами различных масштабов: от глубинных до небольших локальных. Другие **локальные или местные аномалии** связаны со сравнительно небольшими по размерам структурами осадочного чехла или кристаллического фундамента, с отдельными геологическими телами, в том числе, с месторождениями различных полезных ископаемых. В результате второго этапа морфологического анализа составляются так называемые **схемы типов аномалий**, на которые различными условными обозначениями выносят обнаруженные региональные и локальные аномалии.

Процесс обнаружения строится по принципу **от общего к частному** и заключается в том, что сначала интерпретатор анализирует структуру аномального поля, выделяет площадные региональные аномалии и лишь затем на их фоне находит локальные аномалии. При этом для обнаружения региональных аномалий, сравнимых по площади с участком исследований, обычно приходится рассматривать карты на гораздо больших площадях, включающих данный участок. В процессе обнаружения основное внимание надо обращать на границы площадных региональных аномалий, преимущественно связанных с разломами, и на выдержанность характера аномального поля в пределах выделяемой региональной аномалии. Существуют четыре основных признака, указывающих на возможное наличие разлома, а, следовательно, и на границы площадных региональных аномалий.

1. Наличие ступени в уровнях аномального поля. Если средние физические свойства пород контактирующих региональных структур резко различаются, на границе между ними возникает аномалия типа ступени. Для нее характерно наличие линейной зоны больших горизонтальных градиентов аномального поля, проявляющихся на карте в виде сгущения изолиний и их вытягивания вдоль какого-либо направления (рис. 4а).

2. Наличие линейных локальных аномалий. Многие разломы, особенно крупные, сопровождаются внедрением в ослабленные зоны интрузий, а также интенсивными процессами метаморфизма. Это приводит к образованию на границе линейных региональных аномалий в виде цепочек максимумов и минимумов (рис. 4б). Максимумы обычно отмечают наличие интрузий основного и ультраосновного состава, в том числе даек, а также зоны скарнирования, сопровождающиеся накоплением магнетита. Минимумы соответствуют интрузиям кислого состава, зонам дробления, катаклаза, милонитизации и т. п.

3. Смена характерных особенностей аномальных полей. Если средние физические свойства пород контактирующих региональных структур не различаются, аномалия типа ступени на границе между ними не возникает. Вместе с тем, поскольку геологическое строение этих структур - различно, характер аномальных полей, в том числе локальных, по обе стороны границы может быть совершенно разным (рис. 4в).

4. Нарушение корреляции аномальных полей. Разломы внутри близких по строению структур могут сопровождаться сдвигами, приводящими к нарушению корреляции полей. Такие линейные зоны потери корреляции также уверенно обнаруживаются на картах изолиний (рис. 4г).

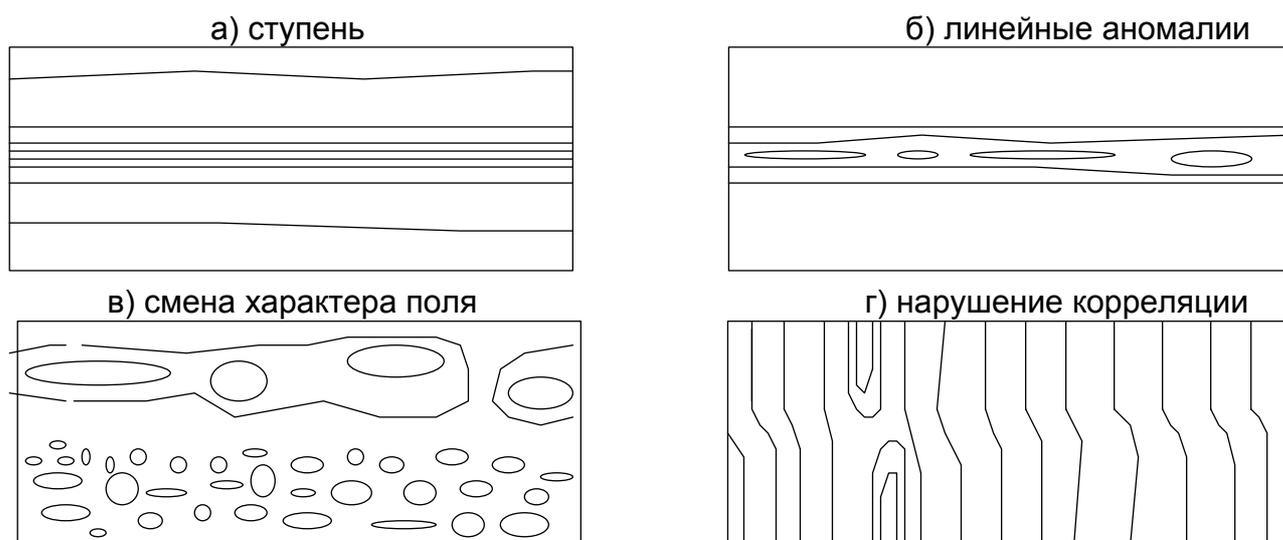


Рис. 4. Основные признаки границ площадных региональных аномалий

Обнаруженные границы площадных региональных аномалий выносят на схему типов, показывая их принятыми условными обозначениями, которые различны в разных организациях. Сами площадные региональные аномалии на схеме обычно показывают сплошной раскраской различными цветами. При этом проверяют, что не осталось частей изучаемого участка, не относящихся к какой-либо площадной региональной аномалии, так как не может быть частей участка, не относящихся одной из региональных геологических структур. Выделение площадных региональных аномалий является весьма ответственным этапом, поскольку при дальнейшем геологическом истолковании результатов в пределах одной такой аномалии пользуются принципом аналогии, который нельзя распространять на разные площадные региональные аномалии.

Завершив анализ общей структуры аномального поля и обнаружение региональных аномалий, интерпретатор переходит к обнаружению на их фоне и классификации достоверных локальных аномалий. Большинство локальных аномалий относится к четырем основным морфологическим типам, признаки которых показаны на рис. 5. Контурными замкнутыми изолиниями обычно отмечают наиболее интенсивные локальные аномалии при слабоградиентном региональном фоне. Если градиент регионального поля достаточно велик, в зависимости от амплитуды локальная аномалия проявляется либо как местный изгиб изолиний, либо как их миндалевидное расширение. Наконец, в виде малых градиентных зон или местных ступеней проявляются на картах небольшие структуры типа флексур, либо местные разломы.



Рис. 5. Основные признаки наличия локальных аномалий

Обнаруженные локальные аномалии показывают на схеме типов различными условными значками. Поскольку сплошной раскраской на этой схеме уже отмечены

площадные региональные аномалии, локальные аномалии обычно обозначают контурами различных цветов или черными контурами с бергштрихами, направленными в сторону уменьшения аномального поля. На этом морфологический анализ завершается. Если в комплекс геофизических методов, применяемый для решения поставленной геологической задачи, входят и гравиразведка, и магниторазведка, схемы типов аномалий составляют по данным каждого из методов.

По завершении морфологического анализа интерпретатор переходит к синтезу информации с целью выработки первоначальных представлений о геологическом строении изучаемого участка. Этот этап называется **начальным синтезом**, и на нем каждой из обнаруженных достоверных аномалий ставится в соответствие какой-либо из возможных в данном районе геологических объектов. В результате составляется **схема вероятных источников аномалий**. Основной работой в процессе синтеза является сопоставление карт и схем типов аномалий разных полей друг с другом и с геологическими картами и разрезами изучаемого участка.

Рассмотрим более подробно особенности качественного сопоставления гравитационных и магнитных аномалий. Эта процедура чаще проводится наложением друг на друга карт и схем типов аномалий, изображенных на разных кальках. При наличии соответствующего программного обеспечения подобное сопоставление можно проводить и на ЭВМ. Основная задача сопоставления состоит в выяснении того, какие гравитационные и магнитные аномалии вызваны одним и тем же геологическим объектом, а какие - разными. Эта задача довольно сложна, поскольку характеры сопоставляемых полей различны. Соотношение Пуассона между гравитационным и магнитным потенциалами указывает на то, что магнитные аномалии в зависимости от направления намагниченности объектов фактически ведут себя как градиенты гравитационного поля Δg . В связи с этим гравитационные и магнитные аномалии обычно не совпадают точно по местоположению, размерам и форме. Магнитные аномалии чаще имеют более сложный характер, нежели гравитационные, и теснее связаны с особенностями геологического строения верхней части объектов. Необходимо отметить, что, работая на компьютере, можно дополнительно применять аналитические методы сопоставления, в частности, базирующиеся на совместном анализе спектров гравитационных и магнитных аномалий. Эти методы будут рассмотрены в главе, посвященной трансформациям.

Сопоставление гравитационных и магнитных аномалий дает во многих случаях возможность сделать выводы о их природе. Для этого рассматривают форму аномалий (максимум; минимум; знакопеременная аномалия дипольного характера; максимум, обрамленный минимумами; минимум, обрамленный максимумами и т. п.), их размеры в плане, а также относительное расположение. Геологическая информация

выявляется как в случае принадлежности гравитационных и магнитных аномалий одному объекту, так и в случае несовпадения их источников.

Приведем несколько примеров. В платформенных условиях соответствие интенсивных гравитационных и магнитных аномалий единому источнику может означать, что либо этим источником является блок кристаллического фундамента, либо интрузия, внедрившаяся в осадочный чехол. Отобрать один из этих вариантов зачастую можно, оценивая качественно горизонтальные градиенты полей. Так, если градиенты обоих полей велики, то есть изолинии вблизи границ тел сгущены, это может указывать на небольшую глубину верхней кромки и на вероятность варианта интрузии. Если горизонтальные градиенты - невелики, вероятнее вариант неоднородности в кристаллическом фундаменте. Если коррелирующиеся гравитационные и магнитные аномалии - слабо интенсивны, это может означать, что их источником является рельеф кристаллического фундамента. Тогда, когда локальная гравитационная аномалия не сопровождается магнитной, ее источником, скорее всего, является структура в осадочном чехле. Поскольку для большинства платформенных районов характерно возрастание плотности пород осадочного чехла с глубиной, локальным максимумам подобного вида вероятно соответствует антиклиналь, а локальным минимумам - синклиналь. Вместе с тем, там, где плотность нижележащих пород оказывается меньше, чем у перекрывающих, например, в областях развития соляной тектоники, над антиклиналями, над соляными куполами наблюдаются минимумы силы тяжести.

Сделанные на основании сопоставления гравитационных и магнитных полей выводы относительно их природы должны быть отображены специальными обозначениями на составляемой схеме вероятных источников аномалий. Далее на той же схеме отображают информацию, извлеченную в результате сопоставления с данными других геофизических и геохимических методов, и завершают начальный синтез сопоставлением с геологическими данными по изучаемому участку. На момент проведения начального синтеза геологическая информация на участке обычно бывает весьма фрагментарной. Вместе с тем, если по геологическим данным установлена природа одной из локальных аномалий, то другие локальные аномалии того же типа в пределах той же площадной региональной аномалии скорее всего имеют аналогичную природу. Принцип аналогии дает возможность получить информацию о вероятном происхождении многих локальных аномалий. Составлением схемы вероятных источников завершается визуальное обнаружение аномалий.

В тех случаях, когда высокий уровень геологических помех делает визуальное обнаружение невозможным, интерпретатору приходится прибегать к аналитическим методам обнаружения аномалий с помощью ЭВМ. К настоящему времени разработано достаточно много аналитических способов обнаружения, базирующихся на при-

менении аппарата математической статистики. Детальное изучение этих способов, единых для всех геофизических методов, проводится в рамках специального учебного курса "Теоретические основы обработки геофизической информации". Отметим лишь несколько моментов, важных для дальнейшего изложения. В основу большинства способов обнаружения слабых аномалий на фоне интенсивных помех положено весовое осреднение полей в специально задаваемых скользящих окнах. Это роднит способы обнаружения аномалий со способами их разделения, такими как трансформации. Вообще говоря, разделение полей - один из основных приемов, ведущих к обнаружению слабых аномалий. Таким образом, рассматривая методы разделения гравитационных и магнитных аномалий, мы тем самым еще не раз будем возвращаться к задачам обнаружения.

§ 6. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗДЕЛЕНИЯ АНОМАЛИЙ

На величину гравитационных и магнитных аномалий в каждой из точек наблюдения оказывают влияние все геологические объекты Земли. Аномальные поля из-за этого оказываются достаточно сложными, что не только затрудняет их геологическое истолкование, но во многих случаях мешает даже их визуальному обнаружению. Для упрощения обнаружения и геологической интерпретации естественно прибегнуть к разделению сложных полей на более простые компоненты, истолковать их порознь, а затем, собрав воедино полученные частные модели, синтезировать общую модель изучаемой части Земли. Эта идея, возникнув на ранних этапах развития разведочной геофизики, получила широчайшее распространение, приведя к разработке многих сотен разнообразных приемов разделения аномалий. Вместе с тем, следует отметить, что несмотря на кажущуюся простоту, задачи разделения фактически оказываются весьма сложными.

Покажем на примерах основные причины возникновения указанных сложностей. Главной из них является рассмотренная в первой главе эквивалентность полей различных объектов, приводящая к отсутствию единственности решения обратных задач. Проявления эквивалентности чрезвычайно разнообразны. Так на рис. 6 представлены два находящиеся друг под другом объекта одинаковой плотности, гравитационные аномалии которых практически эквивалентны. Очевидно, аномалии этих тел разделить невозможно, если не знать исходное поле со столь высокой точностью, которая недоступна для современных гравиметров.

Более того, приведенный ранее пример с контактной поверхностью в форме конхоиды Слюза показывает теоретическую возможность существования объектов, поля которых совпадают абсолютно и, следовательно, их принципиально нельзя разделить. Таким образом, при разделении аномальных полей от объектов, распо-

ложенных на разных глубинах, из-за влияния эквивалентности в ряде случаев могут возникать серьезные осложнения.

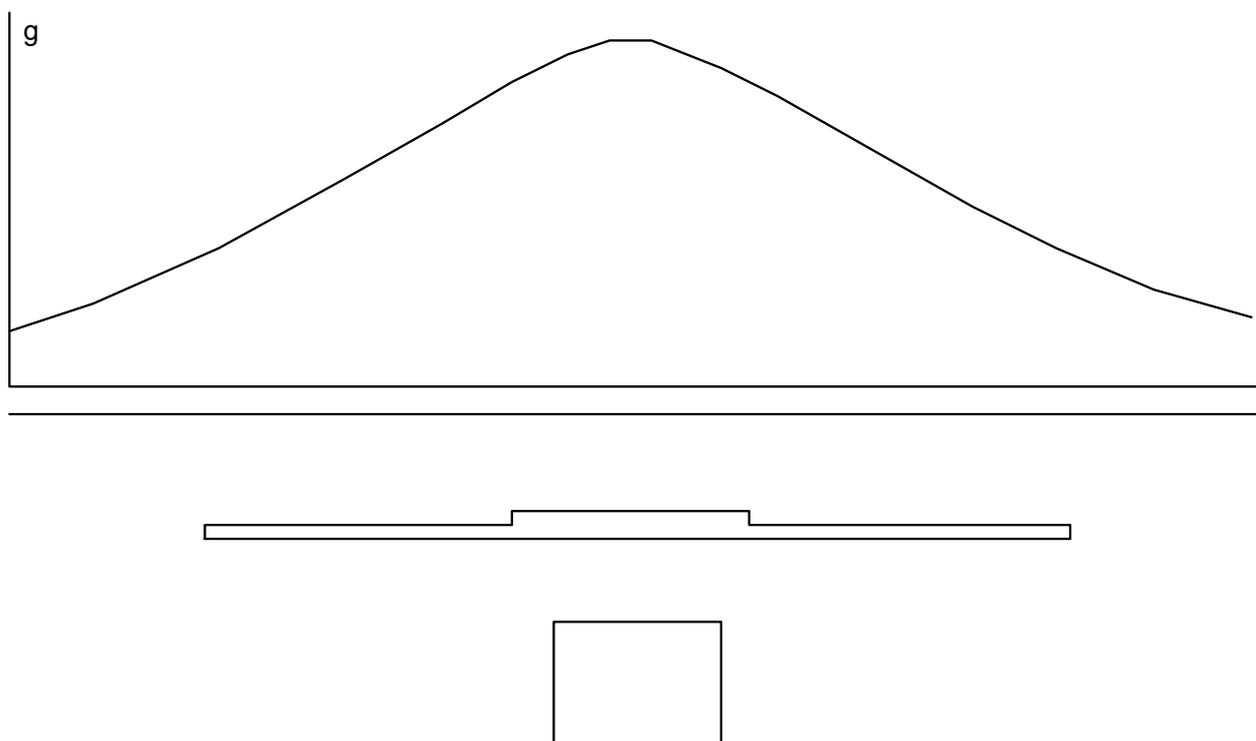


Рис. 6. Объекты одинаковой плотности на разных глубинах, создающие практически эквивалентные гравитационные аномалии

Не столь очевидно, что подобные трудности могут возникать и при разделении аномалий от тел, разнесенных по горизонтали. Довольно распространено заблуждение, сводящееся к тому, что гравитационная аномалия от объекта всегда локализуется непосредственно над ним, но это не так. На рис.7 показана гравитационная аномалия от неоднородного объекта, состоящего из частей с положительной и отрицательной избыточными плотностями, причем экстремум графика находится далеко в стороне от этого объекта. Такую же аномалию создает однородный объект, расположенный непосредственно под экстремумом.

Аналогичный пример легко построить и для магнитных аномалий. Теоретически не исключается ситуация, при которой гравитационные и магнитные аномалии объекта локализируются даже в другом регионе за тысячи километров от него. Очевидно, аномалии и от таких практически эквивалентных объектов крайне сложно разделить.

Эквивалентность является препятствием для разделения как гравитационных, так и магнитных полей. Кроме того, разделение магнитных аномалий осложняется за счет взаимного влияния намагниченных тел. Если два магнитных тела расположены близко друг к другу, то каждое из них намагничивается не только в земном

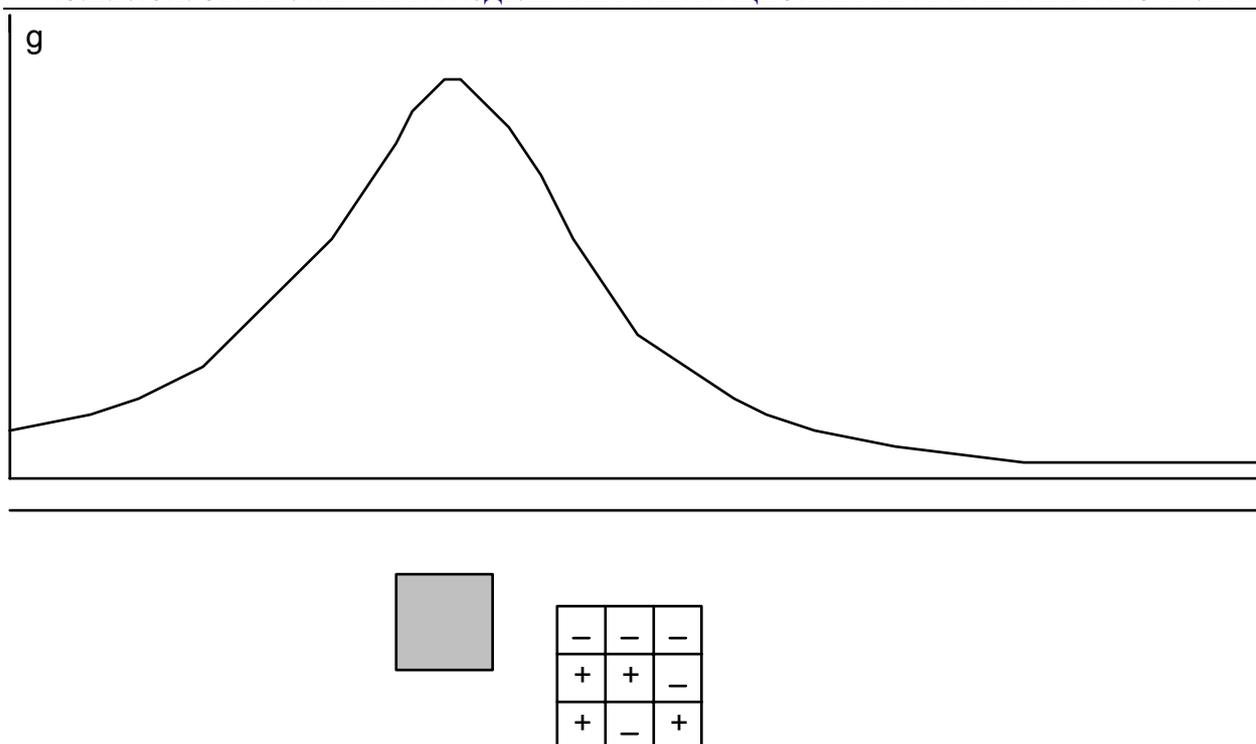


Рис. 7. Объекты, разнесенные по горизонтали и создающие практически эквивалентные гравитационные аномалии

магнитном поле и собственном аномальном (размагничивающем) поле, но также и в аномальном поле соседнего тела. В итоге общая аномалия составного объекта U окажется суммой не двух, а трех составляющих:

$$U = U_1 + U_2 + U_{вз}, \quad (6.1)$$

где U_1 и U_2 - поля тел, а $U_{вз}$ - поле взаимовлияния между ними. На рис.8 показаны эти составляющие для аномалий ΔT модели двух магнетитовых рудных тел с магнитной восприимчивостью 3 СИ. Таким образом, магнитные аномалии, строго говоря, вообще принципиально невозможно разделить, не зная заранее геологического строения. В гравиразведке подобного эффекта нет, поскольку в гравитационном поле не существуют поляризации тел.

Аномалия взаимовлияния тел определяется их формой, величиной магнитной восприимчивости K и расположением по отношению к намагничивающему полю. Если $K \rightarrow 0$, то и $U_{вз} \rightarrow 0$. В связи с этим для слабомагнитных объектов взаимовлиянием их частей обычно пренебрегают и разделяют магнитные аномалии так же, как гравитационные. Однако, применять такой прием надо с осторожностью, оценивая возможные погрешности, как это делается при решении прямой задачи с учетом размагничивания [8]. Отметим, что $U_{вз}$ заведомо меньше 1 нТл только для объектов, магнитная восприимчивость которых менее $634 \cdot 10^{-5}$ СИ.

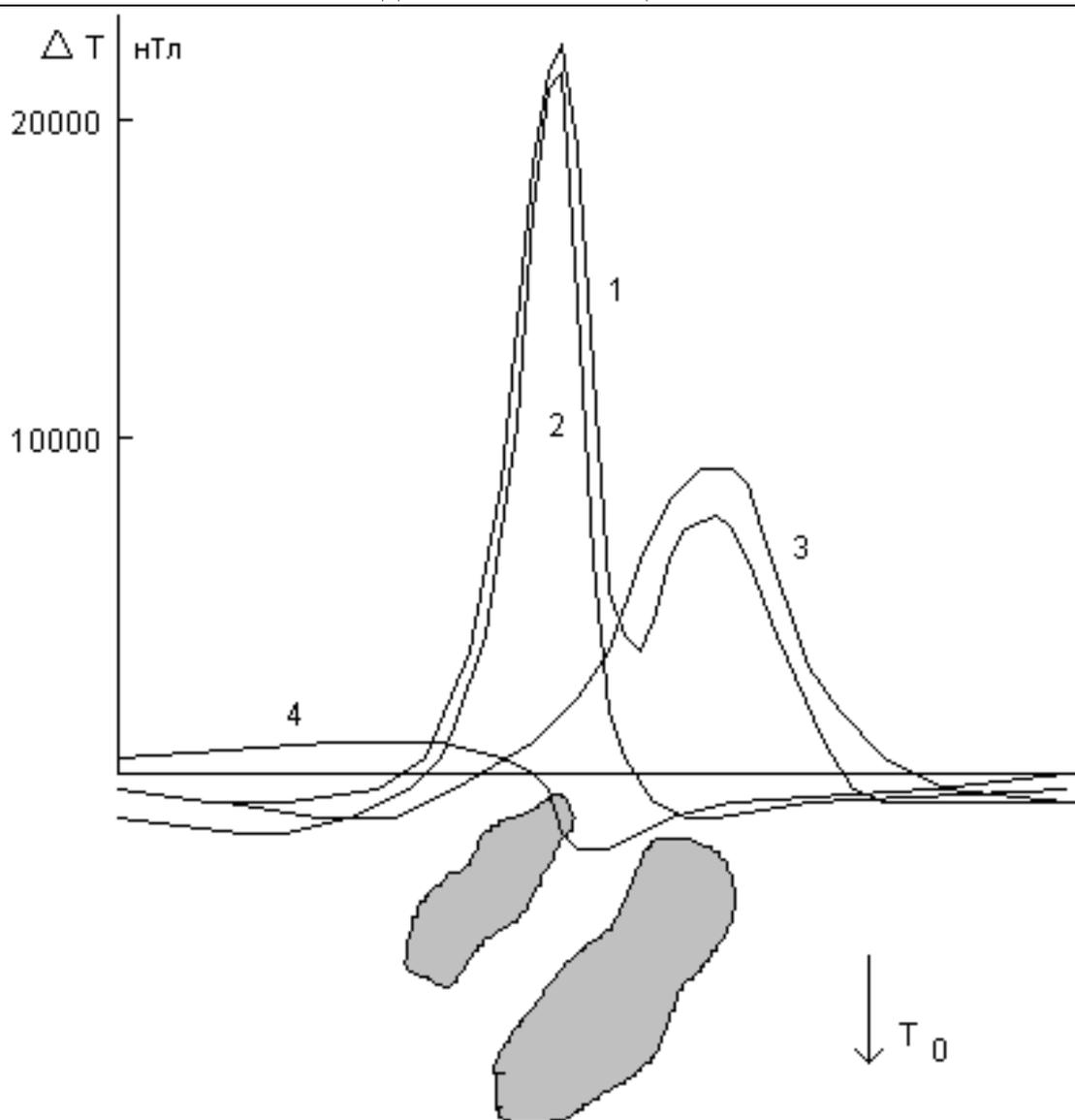


Рис. 8. Взаимное влияние близких магнитных объектов с магнитной восприимчивостью 3 СИ: 1 - общая аномалия объекта, 2 - аномалия первого тела, 3 - аномалия второго тела, 4 - аномалия взаимовлияния тел

Таким образом, строгое разделение гравитационных и магнитных аномалий в общем случае - невозможно. Оно является некорректной операцией и чаще применяется на начальных этапах интерпретации для выделения, выявления в визуально обнаруживаемой форме информации об отдельных составляющих аномального поля. Вместе с тем, в отдельных частных случаях задача разделения поддается решению, для чего интерпретатор должен привлекать всю имеющуюся априорную информацию.

К настоящему времени предложено несколько тысяч способов разделения, основанных на различных идеях извлечения информации и опирающихся на разный объем требуемых для их применения априорных сведений. В зависимости от объе-

ма и вида требуемой априорной информации большинство способов можно отнести к четырем основным группам, указанным в таблице 1.

Таблица 1.

Группа способов разделения	Объем требуемой информации
Геологическое редуцирование	Детальные сведения о форме, расположении некоторых из объектов и о их физических свойствах
Корреляционные способы	Сведения о характеристиках некоторых объектов на эталонных профилях или площадях
Трансформации	Сведения о возможном спектральном составе различных составляющих
Аппроксимационные способы	Общие представления о характере возможных источников аномалий

Для исключения из аномального поля составляющих, связанных с известными объектами, применяют геологическое редуцирование. Оно сводится к вычислению поля этих объектов и вычитанию его из наблюдаемого поля. при этом требуется достаточно большой объем априорной информации.

Если столь подробных сведений об изучаемых объектах нет, но есть достоверная информация об аналогичных объектах в исследуемом районе на отдельных эталонных профилях или площадях, для разделения применяют корреляционные способы. Они заключаются в установлении на эталоне корреляционных связей между какой-либо из составляющих поля и параметрами интересующего объекта с последующим применением найденных связей для выделения требуемой составляющей на всей площади исследований.

Эти две группы способов разделения активно опираются на априорную геологическую информацию и всегда дают возможность геологически содержательного истолкования разделяемых компонент. Более формальный характер имеют две другие группы: трансформации и аппроксимационные способы.

Трансформации состоят в подавлении мешающей компоненты поля и наиболее четком выделении интересующей компоненты. Фактически они сводятся к пространственной фильтрации аномального поля в скользящих окнах.

Аппроксимационные способы заключаются в приближении какой-либо из составляющих поля функцией с заданными свойствами. С одной стороны, аппроксимирующими функциями могут быть, например, полиномы, то есть функции, не имеющие строгого геологического соответствия. С другой стороны, для аппроксимации могут применяться и функции, описывающие поля некоторых физических объектов,

хотя и не обязательно именно тех, которые реально существуют на исследуемом участке. Среди последних наиболее часто используют поля формальных источников: точечных и линейных масс, диполей, пластинок, стержней и т. п.

§ 7. ГЕОЛОГИЧЕСКОЕ РЕДУЦИРОВАНИЕ АНОМАЛИЙ

Геологическое редуцирование - этот способ разделения аномальных полей от известных и неизвестных объектов. Оно состоит в вычислении поля известных объектов, то есть в решении прямой задачи для них, и вычитании рассчитанного поля из наблюдаемого. Естественно, для применения геологического редуцирования требуется иметь полную информацию об этих объектах, то есть знать их местоположение, форму, строение, элементы залегания, физические свойства и т. п. Если такая информация имеется, применение геологического редуцирования для разделения полей является наиболее оправданным, особенно в гравиразведке, где нет взаимовлияния тел.

При решении различных геологических задач применение геологического редуцирования имеет специфические особенности, однако, можно выделить и общие подходы к нему. Обычно геологическое редуцирование начинают с учета верхних границ раздела сред, перекрывающих изучаемый объект. Эти границы достаточно часто бывают известны по данным геологической съемки, по материалам горно-буровых работ, сейсморазведки или электроразведки. Физические свойства пород получают путем измерений на отобранных образцах или по материалам каротажа. Плотность рыхлых отложений изучают гамма-гамма методом в скважинах, канавах и шурфах, а также путем подземной регистрации космического излучения. Надо отметить, что плотностная граница между рыхлыми и коренными отложениями создает довольно большие гравитационные аномалии, поскольку она находится на небольшой глубине, а плотность рыхлых пород намного меньше, чем у коренных, иногда до 1 г/см^3 .

На рис. 9 показан пример геологического редуцирования гравитационной аномалии рыхлых отложений на полиметаллическом месторождении. Здесь избыточная плотность руд составляет 3 г/см^3 , плотность вмещающей толщи карбонатных пород $2,7 \text{ г/см}^3$, а плотность рыхлых отложений - всего около 2 г/см^3 . Карманы рыхлых отложений над рудой создают значительные помехи, достигающие нескольких десятых долей миллигала, но, после изучения их формы с помощью электроразведки методом ВЭЗ и редуцирования, остаточная аномалия от руды становится достаточно простой и допускающей количественное истолкование.

Вторым этапом геологического редуцирования является учет границ раздела, расположенных ниже изучаемого объекта. При изучении осадочного чехла серьез-

ное мешающее влияние оказывает плотностная граница на поверхности кристаллического фундамента. Сведения о ней обычно получают по данным сейсморазведки, структурной электроразведки и глубокого бурения. В районах, где породы осадочного чехла практически немагнитны, иногда прибегают к такому приему: сначала по материалам магниторазведки определяется форма поверхности фундамента, а затем проводится редуцирование ее влияния на гравитационное поле.

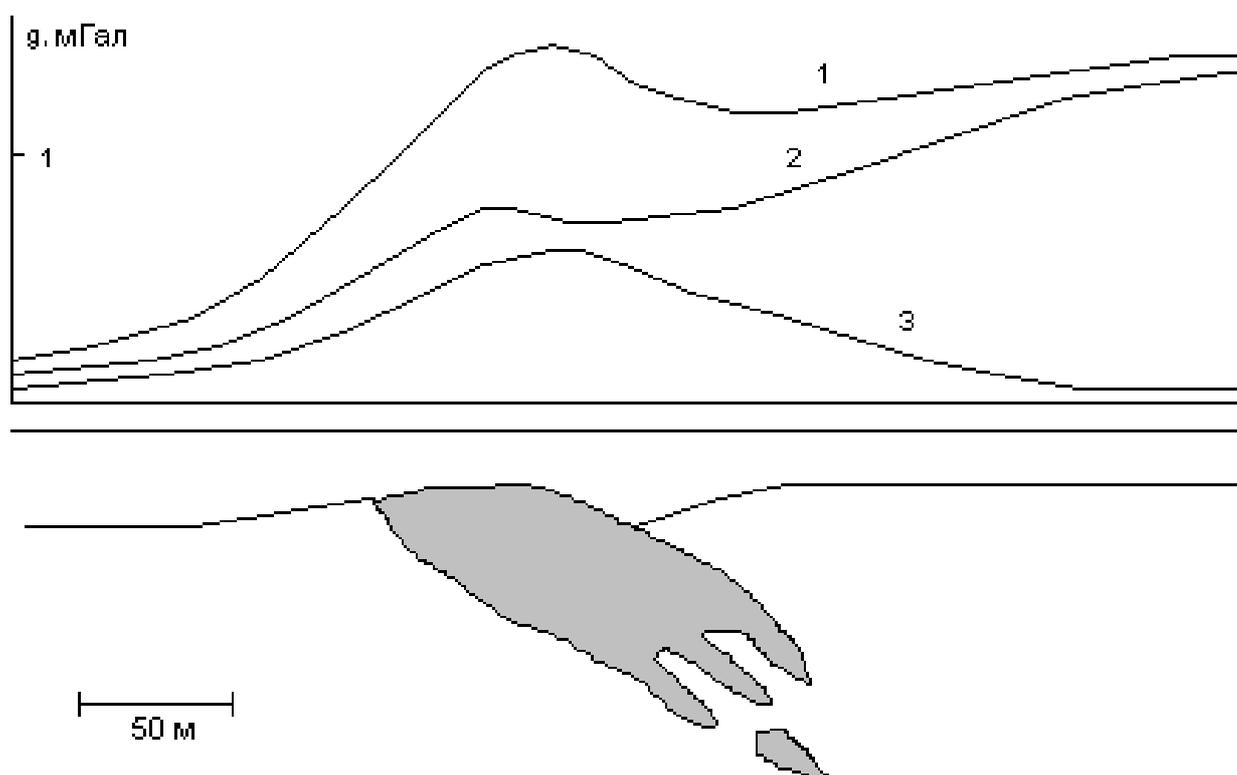


Рис. 9. Геологическое редуцирование поля рыхлых отложений на полиметаллическом месторождении: 1 - наблюдаемая аномалия силы тяжести, 2 - аномалия от рыхлых отложений, 3 - остаточная аномалия от рудного тела

Третий этап геологического редуцирования - это учет смежных геологических объектов. При разведке рудных месторождений учитываются известные рудные тела, на ранних стадиях геологоразведочных работ - соседние массивы. Редуцирование влияния таких массивов можно проводить непосредственно по аномальному полю, причем, по гравитационному полю это делать, естественно, удобнее. Вначале непосредственно по карте изолиний или, привлекая схему типов аномалий, определяют границы массивов в плане и аппроксимируют каждый из них вертикальной призмой. Далее решают линейную обратную задачу, определяя плотность (в случае

применения магниторазведки - намагниченность) каждого из выделенных массивов. Наконец, проводя геологическое редуцирование полей моделей массивов с подобранными физическими свойствами, выделяют аномальное поле изучаемого участка.

Напомним еще раз, что геологическое редуцирование магнитных аномалий следует проводить с осторожностью, обращая внимание на величину возможных эффектов взаимовлияния. Пример, приведенный на рис. 8, показывает, сколь существенно может быть искажена за счет этого остаточная аномалия у сильномагнитных объектов. Лишь для пород, магнитная восприимчивость которых не превышает $634 \cdot 10^{-5}$ СИ, эффектом взаимовлияния можно пренебрегать и считать, что остаточная аномалия представляет собой фактическую магнитную аномалию от неизученных объектов участка.

§ 8. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СПОСОБЫ РАЗДЕЛЕНИЯ АНОМАЛИЙ

Корреляционные способы разделения базируются на использовании специфической модели аномального поля в виде суммы трех составляющих. Первая из них, не представляющая непосредственного интереса для решения поставленной геологической задачи и в целом совпадающая с региональным фоном, аппроксимируется некоторой формальной системой функций, обычно алгебраическими полиномами. Вторая составляющая, характеризующая локальные аномалии, считается имеющей тесную корреляционную связь с изучаемыми параметрами, такими как глубина субгоризонтальной контактной поверхности раздела сред или переменные физические свойства горизонтального пласта. Наконец, третья составляющая - это помеха, вызванная погрешностями съемки и неоднородностью верхней части изучаемого разреза. Корреляционные способы нашли наибольшее применение при решении структурных геологических задач и заключаются в установлении на эталонном участке или профиле корреляционных связей между локальной составляющей исходного поля и изучаемыми параметрами объекта с последующим применением найденных связей для выделения требуемой компоненты на всей площади исследований. Корреляционные способы разделения гравитационных и магнитных аномалий имеют общие основы, поэтому в дальнейшем мы будем обозначать элемент интерпретируемого поля стандартно как **U**.

Рассмотрим применение корреляционных способов разделения на примере решения задачи определения формы контактной поверхности, то есть глубины до нее $h(x,y)$ в ряде точек участка исследований. Во многих районах локальные аномалии, связанные с такой поверхностью, можно с достаточной точностью считать пропорциональными данной глубине, что дает возможность представить их в следующей форме:

$$U_{\text{лок}}(x, y) = bh(x, y), \quad (8.1)$$

где коэффициент пропорциональности **b** не меняется в пределах изучаемого участка. Региональный фон, осложняющий эти аномалии и связанный с более глубоко залегающими геологическими структурами, можно считать достаточно хорошо аппроксимируемым алгебраическими полиномами, то есть функциями вида $a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + \dots$, которые в общем виде можно записать как

$$U_{\text{пер}}(x, y) = \sum_{q,s=0}^n a_{qs} x^q y^s, \quad (8.2)$$

где $0 < q+s \leq n$. Метод квазирешений позволяет свести разделение на эталонном участке к решению следующей линейной задачи подбора неизвестных параметров a_{qs} и **b**:

$$\Phi(a_{qs}, b) = \sum_{k=1}^m \left[U(x_k, y_k) - \sum_{q,s=0}^n a_{qs} x_k^q y_k^s - bh(x_k, y_k) \right]^2 = \min. \quad (8.3)$$

Число точек наблюдения **m**, где известны значения поля **U** и глубины изучаемого контакта **h**, должно быть больше, нежели число определяемых коэффициентов (в данном случае **n+1**), тогда квазирешение получится достаточно устойчивым. Как было показано в § 3, эта задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно a_{qs} и **b**. Далее во всех точках изучаемого участка, зная эти параметры, можно вычислить региональный фон по формуле (8.2) и найти локальную аномалию:

$$U_{\text{лок}} = U - U_{\text{пер}}, \quad (8.4)$$

по которой остается с помощью (8.1) рассчитать глубины контактной поверхности **h**.

Рассмотренный способ разделения допускает естественное обобщение на случай, когда коэффициент **b** в пределах участка изменяется. Такой способ называют корреляционным способом разделения с учетом неоднородности параметров связи. Представляя коэффициент **b** в виде полинома, можно вместо (8.1) записать

$$U_{\text{лок}}(x, y) = h(x, y) \sum_{r,t=0}^p b_{rt} x^r y^t, \quad (8.5)$$

где $0 < r+t \leq p$, а b_{rt} - неизвестные коэффициенты, также определяемые на эталонном участке. Заменяя локальную аномалию в условии (8.3), приходим к следующей линейной задаче подбора, имеющей размерность **n+p**:

$$\Phi(a_{qs}, b_{rt}) = \sum_{k=1}^m \left[U(x_k, y_k) - \sum_{q,s=0}^n a_{qs} x_k^q y_k^s - h(x_k, y_k) \sum_{r,t=0}^p b_{rt} x_k^r y_k^t \right]^2 = \min. \quad (8.6)$$

Составляя и решая соответствующую систему нормальных уравнений для эталонного участка, можно найти искомые параметры, после чего провести разделение и определение глубины контактной поверхности на всей изучаемой площади. Таким образом, в рамках принятой модели аномального поля достаточно простыми средствами удастся одновременно решать и задачу разделения полей, и задачу детального количественного описания локальной составляющей.

Важнейший вопрос применения корреляционных способов разделения связан с выбором оптимальной размерности многочленов, то есть параметров n и p . Для этого разделение проводят несколько раз, используя полиномы разных порядков и выбирая в соответствии с характером решаемой геологической задачи тот вариант, который удовлетворяет одному из следующих критериев:

1) минимум дисперсии выделяемой локальной составляющей;

2) минимум модуля коэффициента корреляции между региональной и локальной составляющими;

3) минимум погрешности определения изучаемого параметра на независимом контрольном участке или профиле.

Предложены и другие критерии оптимизации размерности многочленов. Более подробно с ними, как и вообще с корреляционными способами разделения, можно познакомиться в монографии [34].

ГЛАВА 3. ТРАНСФОРМАЦИИ ГРАВИТАЦИОННОГО И МАГНИТОГО ПОЛЕЙ

§ 9. ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНЫХ ТИПОВ ТРАНСФОРМАЦИЙ

Трансформации являются наиболее распространенными способами преобразования и формального разделения полей и сводятся к фильтрации наблюденного поля с целью выделения полезной информации и подавления помех. Формальность подобного разделения заключается в том, что составляющие, на которые разделяются поля, могут не иметь никакого геологического смысла. Вместе с тем, при правильно выбранных параметрах трансформаций полученные компоненты могут оказаться весьма близкими к региональным или локальным аномалиям. В настоящей главе рассматриваются лишь трансформации аномальных полей, измеренных на участке с практически плоской дневной поверхностью. Преобразования полей, измеренных на неровном рельефе, более сложны и проводятся обычно аппроксимационными способами, которые будут рассмотрены в следующей главе.

Трансформации, применяемые для решения практических задач, состоят в последовательном выполнении следующих процедур.

1. Интерпретатор выбирает **скользящее окно**, форма и размеры которого обусловлены решаемой задачей.

2. В пределах скользящего окна, в том числе и на его границе, указываются точки, называемые **узлами**, и каждому узлу ставится в соответствие число, которое называется **весовым коэффициентом**.

3. Скользящее окно накладывается на какую-либо часть изучаемого участка, при этом узлы оказываются над точками, где измерено аномальное поле.

4. Вычисляется сумма произведений весовых коэффициентов в узлах скользящего окна на значения аномального поля в точках участка, попавших под эти узлы.

5. Рассчитанное число считается относящимся к одной из точек участка, расположенной, как правило, под центром скользящего окна.

6. Помещая скользящее окно в различные части участка и вычисляя каждый раз соответствующие суммы произведений весовых коэффициентов на значения поля, интерпретатор получает значения в ряде точек, описывающие в совокупности новую функцию на изучаемом участке, называемую **трансформантой**.

7. Поточечное вычитание трансформанты из наблюденного поля приводит к определению на этом участке **остаточного поля** или **остаточных аномалий**.

В итоге наблюденное поле разделяется на две составляющие: трансформанту и остаточное поле. Обычно одна из них близка к региональному фону, а другая - к локальным аномалиям.

К настоящему времени предложены сотни трансформаций, различающихся формой применяемого скользящего окна, расположением узлов в нем и весовыми коэффициентами в узлах, определяющих смысл получаемых трансформант. Рассмотрим вкратце их основные разновидности.

По форме скользящего окна различаются изотропные и анизотропные трансформации. Скользящие окна изотропных трансформаций чаще всего представляют собой круг или квадрат и применяются для фильтрации изометричных аномалий или аномалий неизвестного простирания. Скользящие окна анизотропных трансформаций - это обычно прямоугольник, эллипс или параллелограмм. Такие трансформации применяются для выделения аномалий с определенным простиранием. Предельным случаем анизотропной трансформации является профильная трансформация, то есть трансформация двумерной аномалии по профилю вкрест ее простирания. Скользящим окном в этом случае является отрезок. Предлагались и другие, более сложные по форме скользящие окна, но они широкого распространения не получили.

Расположение узлов в окне может быть самым разнообразным, но среди этого многообразия можно выделить два основных типа. Первый тип отличается более

или менее равномерным расположением узлов по площади скользящего окна, а второй характеризуется расположением узлов только по его границе.

Наиболее существенные особенности придают трансформациям весовые коэффициенты в узлах, определяющие физический смысл получаемых трансформант. С этой точки зрения основные трансформации относятся к трем группам:

- 1) способы сглаживания полей;
- 2) способы аналитического продолжения полей;
- 3) способы расчета высших производных наблюдаемых полей.

Рассмотрим вкратце наиболее распространенные задачи, для решения которых применяются эти трансформации, и некоторые приемы вычисления трансформант. При этом мы пока не будем касаться универсального и мощного способа их расчета, связанного с применением тригонометрических полиномов, которому будет посвящен следующий параграф.

Сглаживание применяется для подавления помех, связанных со случайными погрешностями измерений и влиянием неоднородностей верхней части изучаемого разреза. Наиболее популярным способом сглаживания является осреднение, другими словами, вычисление скользящего среднего. Эта трансформация дает возможность выделить региональную аномалию, подавив локальные. Соответственно, остаточное поле, получаемое после вычитания осредненной аномалии из наблюдаемой, будет отражать преимущественно локальные аномалии. Весовые коэффициенты в узлах, расположенных, как правило, равномерно по всей площади скользящего окна, равны $1/N$, где N - число узлов. Таким образом, трансформанта, относящаяся к центру окна, представляет собой среднее арифметическое из значений наблюдаемого поля в точках участка, попавших под узлы. Основными параметрами, определяющими эффективность разделения способом осреднения, являются размеры скользящего окна и расстояние между узлами в нем. Чем они больше, тем более сглаженной оказывается трансформанта. Теоретическое обоснование применения осреднения было проведено в 1945 году А.Н.Тихоновым и Ю.Д.Буланже. Они предложили выбирать оптимальные параметры, исследуя зависимость трансформанты в экстремуме локальной аномалии от указанных параметров и отмечая характерные точки получаемых графиков.

Многие трансформации используют сглаживание в виде осреднения по окружностям. Обозначим среднее значение поля U на окружности радиуса R как $\overline{U(R)}$. Вычисленное таким образом осредненное значение отражает региональные аномалии, но если его вычесть из наблюдаемого значения в центре данной окружности, то в результате получится локальная аномалия. Трансформация, определяемая формулой

$$\delta U(0) = U(0) - \overline{U(R)}, \quad (9.1)$$

называется способом вариаций или способом Андреева-Гриффина. Точка с нулевыми координатами здесь, как и во всех трансформациях обозначает центр скользящего окна, в данном случае - центр круга. Аналогом (9.1) для профильного варианта может служить формула

$$\delta U(x) = U(x) - \frac{U(x-R) + U(x+R)}{2}. \quad (9.2)$$

Ее часто записывают также в виде (9.1). На примере этой простейшей трансформации легко показать некоторые характерные особенности, присущие всем, в том числе и более сложным трансформациям. На рис. 10 показаны результаты пересчета в вариационную функцию аномалии силы тяжести, представляющей собой сумму линейного регионального фона и локального максимума.

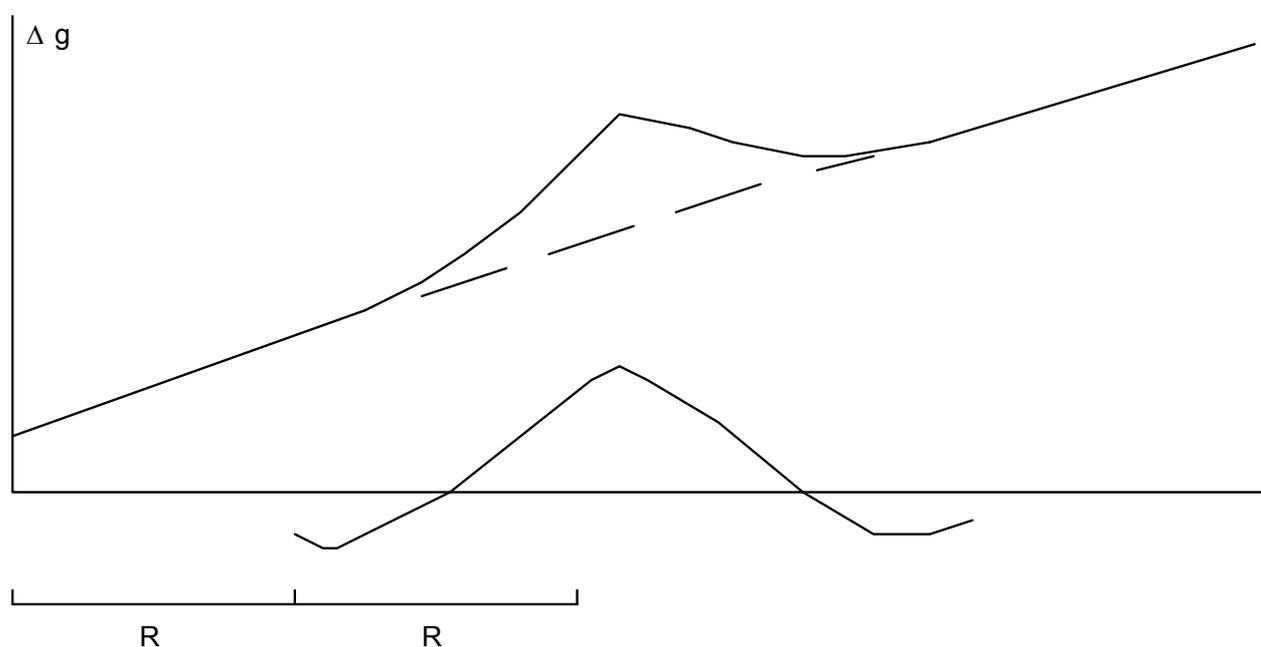


Рис. 10. Выделение локальной аномалии способом вариаций

Анализ полученных результатов показывает следующее:

- 1) применение трансформации дало возможность подавить региональный фон и выделить локальную аномалию;
- 2) поскольку вычисляемая трансформанта относится к точке в центре скользящего отрезка длиной $2R$, график вариационной функции оказался полученным на более коротком профиле, нежели исходное поле: справа и слева в результате трансформации оказались потерянными отрезки длиной R ;
- 3) выделенная локальная аномалия оказалась более сложной формы, нежели исходная: вместо максимума выделилась знакопеременная аномалия, причем, если

рассматривать ее как аномалию силы тяжести, минимумы по ее краям не отвечают никаким природным объектам (фактически полученная локальная аномалия имеет вид, похожий на вертикальную производную исходной локальной аномалии).

Таким образом, своеобразной "ценой" разделения путем трансформирования явились сокращение площади участка, где известна трансформанта, и искажение формы выделенной аномалии. Это является общим для любых трансформаций.

Осреднение по окружностям является основой одной из наиболее популярных трансформаций способом Саксова-Ниггарда, которая описывается следующей формулой:

$$F(0) = \frac{1}{R_2 - R_1} [\overline{U(R_1)} - \overline{U(R_2)}]. \quad (9.3)$$

Этот способ дает возможность выделить локальную аномалию, причем, как будет показано ниже, данная трансформация наиболее чувствительна к точечным массам, расположенным на определенной глубине, зависящей от соотношения радиусов окружностей осреднения.

Предложены и другие способы сглаживания, основанные на аппроксимации функции в скользящем окне полиномами невысоких порядков. Рассмотрим один из простейших способов сглаживания данных профильных наблюдений в скользящем окне по пяти узлам. Обозначим координату центра окна как 0, а остальные узлы расположим симметрично относительно центра в точках с координатами $\pm R$ и $\pm 2R$, где R - расстояние между точками наблюдения. Далее построим сглаживающий полином второй степени $a_0 + a_1x + a_2x^2$, аппроксимирующий наблюденное поле в скользящем окне. Определение трех неизвестных коэффициентов полинома по пяти значениям поля в узлах представляет собой линейную задачу подбора, которая, как было показано в первой главе, сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Коэффициент a_0 представляет собой сглаженное поле в центре окна, поэтому результирующую формулу данной трансформации можно записать следующим образом:

$$U_{\text{сгл}}(0) = \frac{1}{35} \{17U(0) + 12[U(-R) + U(+R)] - 3[U(-2R) + U(+2R)]\} \quad (9.4)$$

или, введя обозначение

$$\overline{U(R)} = 0,5[U(-R) + U(+R)], \quad (9.5)$$

в типовом виде

$$U_{\text{сгл}}(0) = \frac{1}{35} \{17U(0) + 24\overline{U(R)} - 6\overline{U(2R)}\}. \quad (9.6)$$

Таким же путем, определяя коэффициенты аппроксимирующих полиномов в разных скользящих окнах, можно получить множество различных трансформаций сглаживания.

Второй группой трансформаций является аналитическое продолжение полей в верхнее и нижнее полупространства. Область применения этих трансформаций очень велика: от обнаружения слабых аномалий до количественной интерпретации при определении формы контактной поверхности, при локализации особых точек функций, описывающих аномальные поля и т.д. Аналитическое продолжение вверх дает возможность сгладить помехи, подавить локальные аномалии и выделить региональные. Аналитическое продолжение вниз применяется для выделения локальных аномалий на фоне региональных. Теоретической основой аналитического продолжения является интеграл Пуассона, представляющий собой решение внешней задачи Дирихле для плоскости. Если исходная гармоническая, то есть удовлетворяющая уравнению Лапласа, функция U задана на всей бесконечной горизонтальной плоскости, то ее значение в точках верхнего полупространства можно определить с помощью следующей формулы, называемой интегралом Пуассона:

$$U(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\xi, \eta, 0) d\xi d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (9.7)$$

Ось z при этом считается направленной вверх. В двумерном случае, когда исходное поле задано на профиле, осуществив интегрирование по координате η , приходим к следующему виду интеграла Пуассона:

$$U(x, z) = \frac{z}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\xi, 0) d\xi}{(\xi - x)^2 + z^2}. \quad (9.8)$$

На практике эти интегралы берутся численно, для чего бесконечная плоскость заменяется конечным скользящим окном, а сами интегралы - суммами произведений значений поля в узлах на соответствующие коэффициенты. Для получения достаточно точных результатов пересчета размеры скользящего окна должны быть примерно в 10 раз больше высоты пересчета, а расстояние между узлами - примерно равным этой высоте. Естественно, если поле между узлами резко меняется, результаты пересчета могут оказаться весьма далекими от реального поля на этой высоте. Тем не менее, аналитическое продолжение вверх является устойчивым к случайным помехам.

Чрезвычайно важно понимать аппроксимационную структуру интеграла Пуассона. Дело в том, что формулы (9.7) и (9.8) фактически описывают двухэтапную процедуру. Первый ее этап состоит в представлении наблюдаемого поля полем простого слоя, расположенного на самой поверхности наблюдений. Как известно, компонента поля, нормальная к плоскому простому слою, представляет собой произведение поверхностной плотности этого слоя на угол его видимости из точки наблюдения. Поскольку точка наблюдения в данном случае совпадает с самим простым слоем, угол видимости всюду равен 2π . Тогда в каждой точке поверхностная

плотность простого слоя, создающего такое же поле, как наблюдаемое, равна просто $U / 2\pi$. Второй этап фактически сводится к решению прямой задачи для эквивалентного простого слоя, что и показывают формулы (9.7) и (9.8).

Формулы (9.7) и (9.8) также являются основой и продолжения поля вниз. При этом их приходится рассматривать как интегральные уравнения, где неизвестная функция (поле внизу) находится под знаком интеграла. Это так называемые интегральные уравнения первого рода, решение которых - неустойчиво. Необходимо отметить, что гармоническая функция, аналитически продолженная в нижнее полупространство, вовсе не совпадает с реальным полем там. В верхнем полупространстве потенциал и элементы гравитационного и магнитного полей являются гармоническими функциями, удовлетворяющими уравнению Лапласа. Аналитическое продолжение поля вниз также представляет собой гармоническую функцию, имеющую непрерывные производные любых порядков. Реальный же потенциал в нижнем полупространстве удовлетворяет уравнению Пуассона, а его вторые производные имеют разрыв на границах тел. Сказанное иллюстрирует рис. 11, на котором показаны изолинии силы тяжести вне и внутри кругового цилиндра и соответствующие изолинии аналитического продолжения. Вне масс они совпадают, внутри - принципиально различаются: изолинии реального поля на границе тела имеют точки излома, а изолинии аналитического продолжения остаются гладкими. Зато в центре круга, являющегося особой точкой (полюсом первого порядка) функции, описывающей внешнее поле данной модели, все изолинии аналитического продолжения пересекаются. Благодаря этому, аналитическое продолжение в нижнее полупространство является основой одной из групп методов количественной интерпретации - методов особых точек.

Несколько особняком стоят методы аналитического продолжения, основанные на применении сеточной аппроксимации оператора Лапласа. Как известно, лапласиан функции представляет собой отличие значения функции в некоторой точке от среднего ее значения на малой сфере с центром в этой точке. У гармонической функции, для которой лапласиан всюду равен нулю, эти значения совпадают. В двумерном случае вместо сферы рассматривается цилиндр. Сеточная аппроксимация приводит к дискретной форме уравнения Лапласа и к шаблону "крест", показанному на рис. 12 а: значение гармонической функции в центре креста является средним из четырех значений в его вершинах. Пусть известны значения гармонической функции в ряде точек на поверхности Земли ($z=0$ на рис. 12 б), расстояние между которыми равно h . С помощью интеграла Пуассона можно вычислить значения этой функции в верхнем полупространстве на высоте h ($z=h$). Тогда значения на уровне $z=-h$ можно получить, используя крестовый шаблон, по формуле

$$U(x, -h) = 4U(x, 0) - U(x - h, 0) - U(x + h, 0) - U(x, h). \quad (9.9)$$

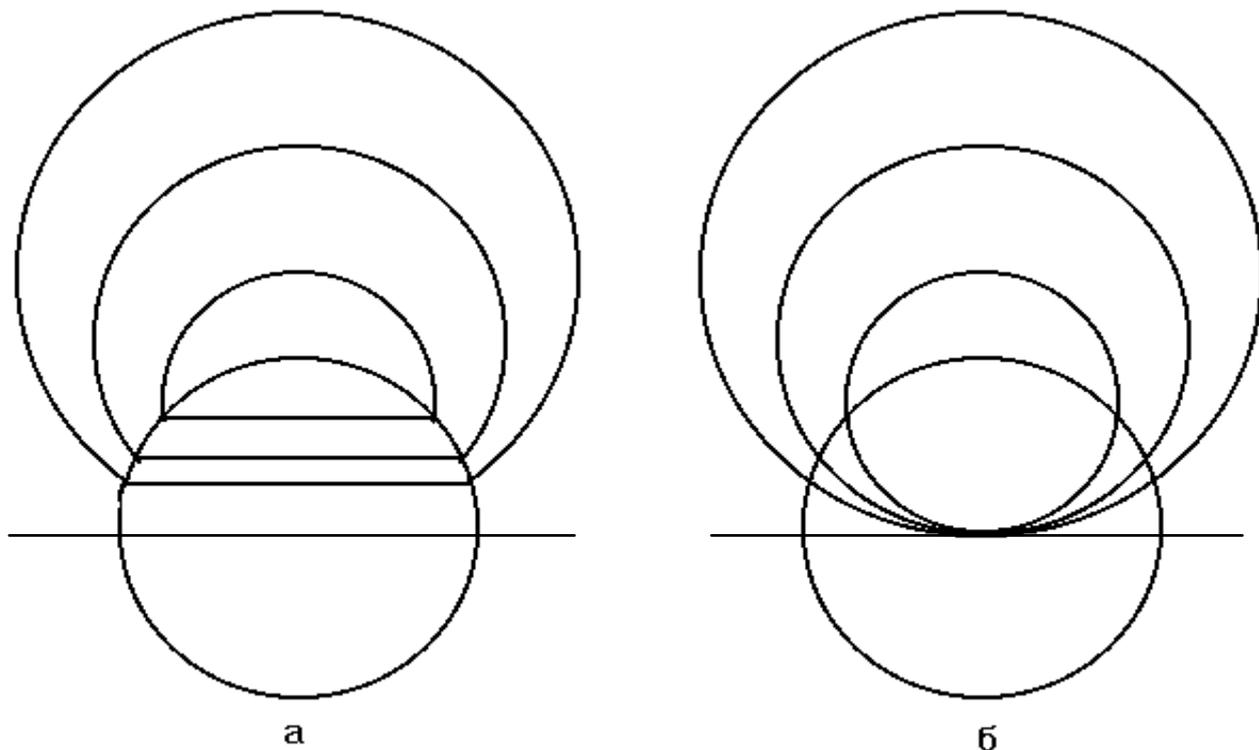


Рис. 11. Изолинии Δg модели кругового цилиндра в вертикальной плоскости: а) реальное поле; б) аналитическое продолжение внешнего поля внутрь цилиндра.

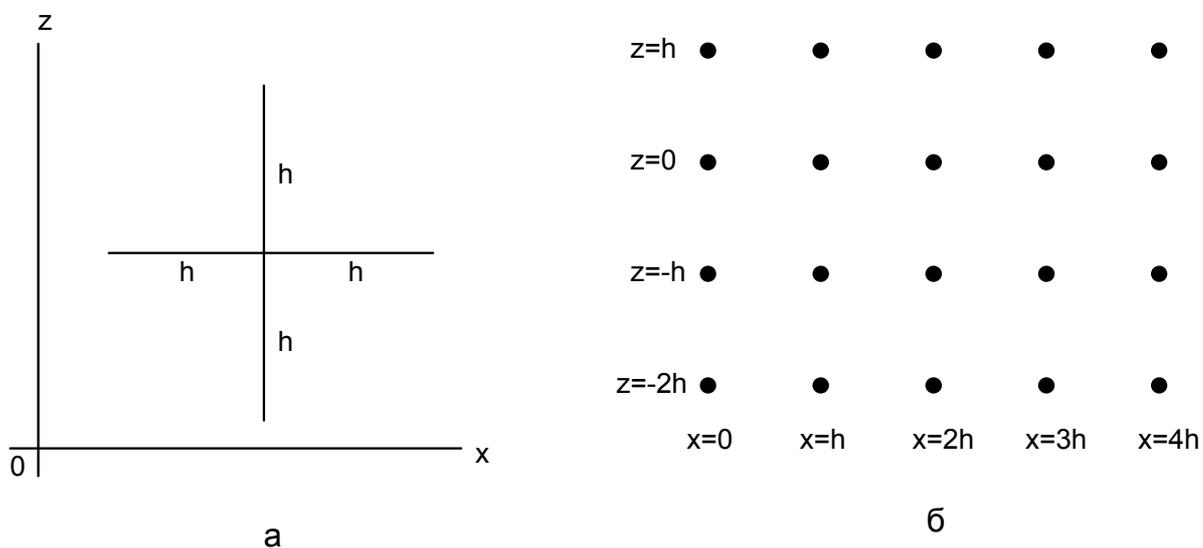


Рис. 12. Сеточное продолжение поля: а - аппроксимационный шаблон "крест", б - расположение точек сетки в вертикальной плоскости

Далее, используя значения функции на уровнях $z=0$ и $z=-h$, с помощью того же шаблона и аналогичной формулы можно продолжить поле на уровень $z=-2h$ и т.д. Пере-

счет с уровня на уровень можно осуществлять вплоть до той глубины, на которой расположена самая верхняя особая точка этой функции. Эту глубину принято обозначать как H . Попытка продолжить глубже приводит к нереальным результатам, вследствие так называемого эффекта распада поля. Он проявляется в том, что получаемые графики становятся похожими на искаженную синусоиду с большим числом экстремумов. Детально этот эффект разбирается в разделах, посвященных количественной интерпретации методами особых точек. Еще раз подчеркнем, что аналитическое продолжение вниз является неустойчивой операцией, весьма чувствительной к наличию случайных помех.

Третьей группой трансформаций являются способы расчета высших производных наблюдаемых полей, применяемые для решения многих задач, основной из которых является выделение локальных аномалий. Если региональный фон близок к полиномиальному, дифференцирование дает возможность его существенного подавления. Пусть результаты гравиметрических или магнитометрических наблюдений представляют собой сумму локальных аномалий и постоянного фона, возникающего обычно из-за ошибок в выборе уровня нормального поля. Для избавления от такого фона достаточно продифференцировать наблюдаемое поле (вычислить его горизонтальный градиент), так как прибавленная константа после дифференцирования становится тождественным нулем. Если региональный фон является полиномом более высокой степени, его можно подавить многократным дифференцированием по горизонтали. При этом, конечно, форма самих локальных аномалий становится более сложной.

Вычисление горизонтальных градиентов играет важную роль в интерпретации гравитационных аномалий типа ступеней, вызываемых дизъюнктивными структурами типа сброса. График горизонтального градиента подобной структуры имеет такую же форму, как поле силы тяжести, создаваемое пластинкой, которая совпадает с плоскостью сместителя. По графику горизонтального градиента легко качественно оценить направление падения сместителя - это направление, в котором значения медленнее убывают при удалении от экстремума. Разработаны простые методы количественной интерпретации для таких структур по характерным точкам графика горизонтального градиента. Во многих районах разломы располагаются довольно близко друг к другу, что затрудняет их визуальное обнаружение по графику силы тяжести. Дифференцирование по горизонтали помогает локализовать отдельные разломы, что иллюстрирует рис. 13.

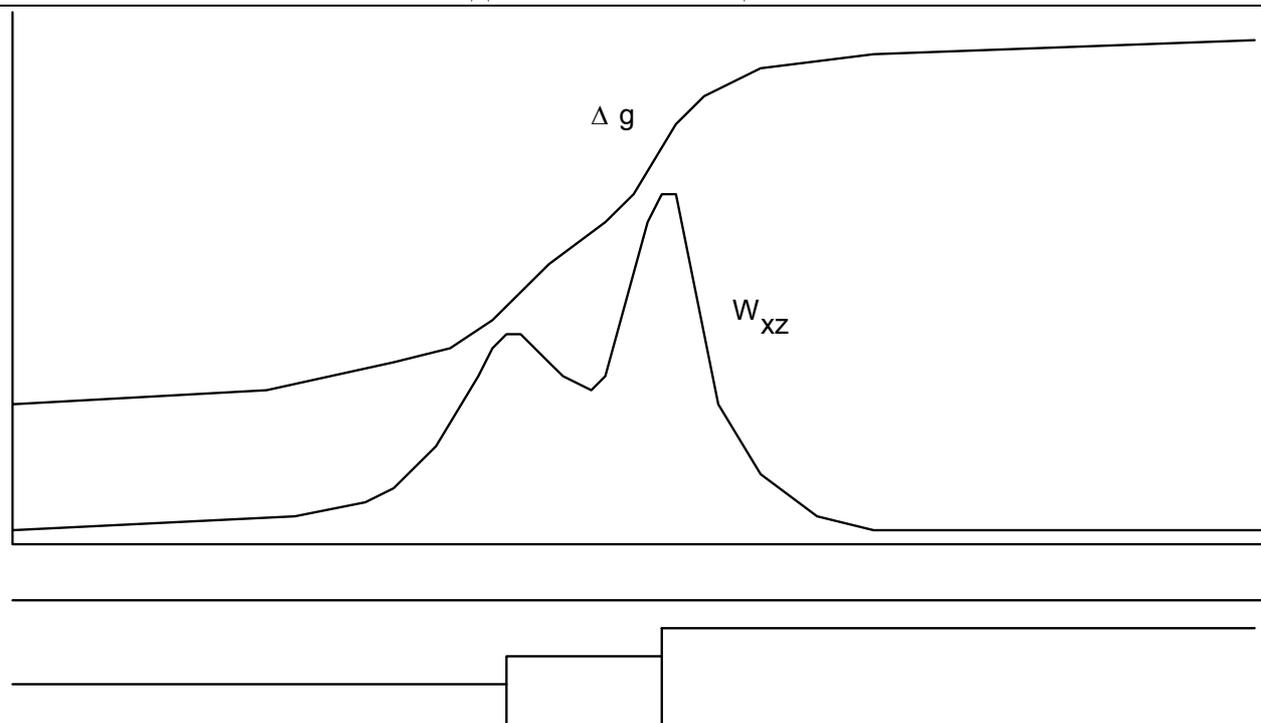


Рис. 13. Локализация аномалий от разломов путем пересчета силы тяжести в ее горизонтальный градиент

Вычисление вертикального градиента, то есть дифференцирование по вертикали помогает локализовать аномалии от сближенных тел, расположенных на одной глубине. На рис. 14 показаны аномалии силы тяжести и вертикального градиента над двумя рудными телами. Поскольку расстояние между телами сопоставимо с глубиной их верхней кромки, график силы тяжести над ними имеет один максимум. Если с целью изучения геологической природы этой аномалии задать вертикальную скважину в ее эпицентре, то скважина, пройдя по вмещающим породам, не подтвердит наличия руды. График вертикального градиента имеет два экстремума над телами, поэтому дифференцирование наблюденного поля по вертикали поможет избежать подобных ошибок. Вычисление второй вертикальной производной локализует аномалии еще сильнее. Вместе с тем, дифференцирование является неустойчивой операцией, поэтому качество его результатов существенно зависит от наличия помех. Кроме того, следует помнить о возможности неоднозначности интерпретации, что было показано на примере в предыдущей главе.

Высшие производные наблюденного поля широко используются для количественной интерпретации в методах особых точек и подбора, особенно в двумерном варианте, причем требования к вытянутости аномалий для них - менее строгие. Дело в том, что высшие производные от тел убывают значительно быстрее, чем сила тяжести. Так сила притяжения точечной массы убывает как квадрат расстояния до нее,

ее первые производные - как куб, вторые - как четвертая степень расстояния и т.д. В результате аномалию силы тяжести можно интерпретировать с использованием двумерных моделей тогда, когда ее длинная ось, вытянутая вдоль простирания, не менее, чем в 5 раз превышает короткую. Для вторых ее производных, к примеру, достаточно, чтобы длинная ось была бы больше лишь в 1,7 раза.

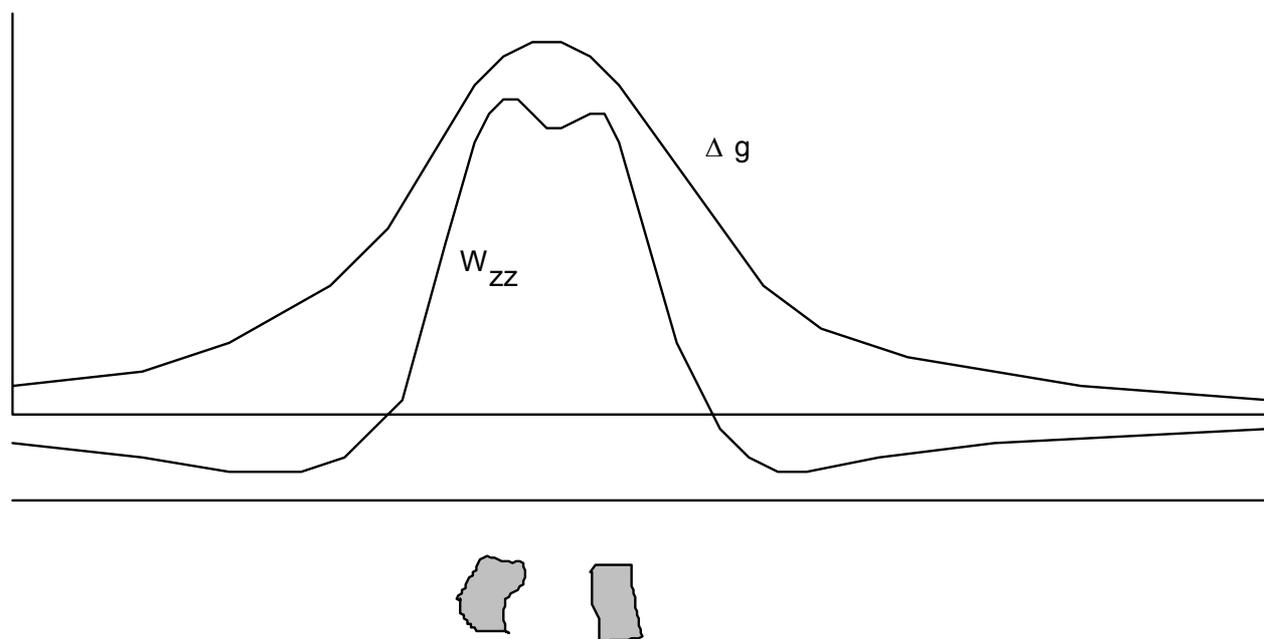


Рис. 14. Локализация аномалий от рудных тел путем пересчета силы тяжести в ее вертикальный градиент

Вычислительные схемы расчета высших производных весьма многочисленны и разнообразны: по-разному вычисляются горизонтальные производные, четные вертикальные производные и нечетные вертикальные производные.

Формулы расчета горизонтальных производных обычно получают дифференцированием различных детально исследованных в численном анализе интерполяционных формул. Принято различать конечно-разностные (интерполяционные) и аппроксимационные формулы. Конечно-разностные формулы для профильных трансформаций в скользящем окне, содержащем n узлов, получают, представляя функцию полиномом $n-1$ степени. Эти формулы при отсутствии помех дают достаточно точные результаты, но при наличии помех являются неустойчивыми. Аппроксимационные формулы получают, представляя функцию в том же окне полиномом более низкой степени, благодаря чему их помехозащищенность выше, чем у конечно-разностных, но точность результатов при испытаниях на полиномиальных функциях - ниже. Для практических расчетов рекомендуется вычисление по формулам разного типа и сопоставление получаемых результатов [23,29]. Приведем две

формулы расчета горизонтального градиента в скользящем окне из пяти точек, расположенным друг от друга на расстоянии Δx . Конечно-разностная формула выглядит так:

$$\frac{\partial U(0)}{\partial x} = \frac{1}{12\Delta x} \{8[U(\Delta x) - U(-\Delta x)] - [U(2\Delta x) - U(-2\Delta x)]\}, \quad (9.10)$$

а аппроксимационная формула

$$\frac{\partial U(0)}{\partial x} = \frac{1}{10\Delta x} \{[U(\Delta x) - U(-\Delta x)] + 2[U(2\Delta x) - U(-2\Delta x)]\}. \quad (9.11)$$

Результаты применения этих формул существенно зависят от правильного выбора расстояния между узлами Δx . Если воспользоваться введенным обозначением глубины, на которой расположена самая верхняя особая точка функции, описывающей поле - H , то для (9.10) оптимальное $\Delta x = (0,5 - 0,7)H$, а для (9.11) оптимальное $\Delta x = (0,2 - 0,4)H$. Вторую горизонтальную производную можно получать двукратным применением этих формул, но удобнее пользоваться специальными формулами таких же типов. С учетом обозначения (9.5) конечно-разностную формулу можно представить в виде:

$$\frac{\partial^2 U(0)}{\partial x^2} = \frac{1}{6\Delta x^2} \{-15U(0) + 16\overline{U(\Delta x)} - 6\overline{U(2\Delta x)}\}, \quad (9.12)$$

а аппроксимационную формулу как

$$\frac{\partial^2 U(0)}{\partial x^2} = \frac{2}{7\Delta x^2} \{-U(0) - \overline{U(\Delta x)} + 2\overline{U(2\Delta x)}\}. \quad (9.13)$$

Вычисление четных вертикальных производных также достаточно просто, так как элементы гравитационного и магнитного полей описываются гармоническими функциями, то есть удовлетворяют следующему уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (9.14)$$

Отсюда следует, что вторая вертикальная производная и, вообще говоря, все четные вертикальные производные выражаются через соответствующие горизонтальные производные. Наиболее проста связь для двумерных полей, у которых производные по направлению простираются y тождественно равны нулю. Тогда

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (9.15)$$

и вторую вертикальную производную оказывается возможным вычислять по формулам (9.12) и (9.13) с переменной результирующего знака. В трехмерном случае для расчетов применяются различные скользящие окна - простейшее из них показано на рис. 15.

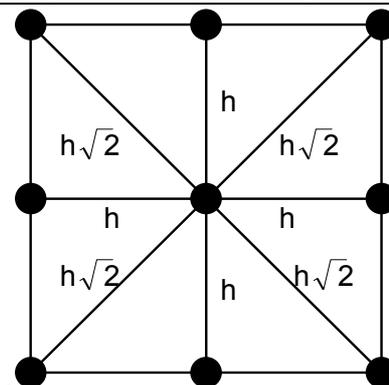


Рис. 15. Расположение узлов в скользящем окне для вычисления второй вертикальной производной

Его особенность состоит в том, что узлы расположены на квадратной сетке. Если шаг сетки обозначить h , то вторую вертикальную производную оказывается можно вычислять по следующей формуле Розенбаха:

$$\frac{\partial^2 U(0)}{\partial z^2} = \frac{1}{h^2} \left\{ 6\overline{U(0)} - 8\overline{U(h)} + 2\overline{U(h\sqrt{2})} \right\} \quad (9.16)$$

Здесь также черта сверху означает осреднение по окружности соответствующего радиуса - фактически по четырем точкам, находящимся на этой окружности. К настоящему времени предложены десятки подобных формул.

Вычисление нечетных вертикальных производных базируется на использовании интеграла Пуассона. Для этого достаточно продифференцировать интегралы (9.7) и (9.8) по z и подставить $z=0$. Получающиеся соотношения допускают численное интегрирование. Существуют достаточно простые вычислительные формулы для подобных расчетов, однако, на практике вычисление вертикальных градиентов, как и большинство рассмотренных трансформаций осуществляется единообразно на основе аппроксимации тригонометрическими полиномами.

Завершим параграф рассмотрением нескольких специфических трансформаций. Первая из них представляет собой расчет на профиле горизонтальной компоненты поля по данным измерения вертикальной и наоборот. Такие преобразования однозначны и связаны с тем, что эти функции - комплексно сопряженные и составляют в паре так называемые комплексные характеристики: комплексную напряженность гравитационного поля $G = g_z + ig_x$ и комплексную индукцию магнитного поля $T = Z + iX$ [8]. Расчет горизонтальных компонент по вертикальным, другими словами, мнимых частей комплексных характеристик по действительным производится на основе решения задачи Неймана и сводится к вычислению интеграла. Поскольку эта трансформация чаще применяется в магниторазведке, запишем его для магнитного случая:

$$X(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z(\xi)}{\xi - x} d\xi. \quad (9.17)$$

На практике этот интеграл берется численно, для чего заменяется суммой произведений в конечном окне. Обратный пересчет горизонтальных компонент в вертикальные проводится по формуле, отличающейся от (9.17) только знаком "минус" перед интегралом.

Для небольших магнитных аномалий $\Delta T \ll T_0$ обычно используется их гармоническое приближение, то есть аномалии ΔT рассматриваются как компонента вектора аномального магнитного поля, направленная вдоль вектора нормального поля T_0 [8]. Если обозначить компоненты этого вектора как X_0, Y_0, Z_0 , а компоненты вектора аномального поля как X, Y, Z , то

$$\Delta T \approx \frac{X_0 X + Y_0 Y + Z_0 Z}{T_0}. \quad (9.18)$$

У двумерных аномалий $Y=0$. Обозначим $c_x = X_0 / T_0$ и $c_z = Z_0 / T_0$, тогда для них (9.18) примет простой вид: $\Delta T = c_x X + c_z Z$. Выражая X через Z по формуле (9.17), придем к интегральному уравнению относительно Z :

$$\Delta T(x) = c_z Z(x) + \frac{c_x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z(\xi)}{\xi - x} d\xi. \quad (9.19)$$

Численное решение этого уравнения дает возможность рассчитать Z по ΔT .

При интерпретации магнитного поля, измеренного вблизи экватора, иногда используют специфическую трансформацию, называемую редукцией к полюсу. Дело в том, что визуальное обнаружение аномалий от субгоризонтально намагниченных тел сложнее, нежели для случая их вертикального намагничивания. Чтобы упростить вид аномалий, В.Баранов предложил трансформировать наблюдаемое магнитное поле ΔT , приводя его к случаю вертикального намагничивания в вертикально направленном вниз нормальном поле, что соответствует индуктивному намагничиванию в районе северного магнитного полюса. Наиболее просто понять смысл этой трансформации на примере двумерных объектов, воспользовавшись теоремой вращения для магнитного поля [8]. В соответствии с ней, если намагниченность любого двумерного тела повернуть на некоторый угол, то во всех внешних точках вектор аномального поля повернется на такой же угол, но в противоположном направлении. Если принять реальное намагничивание ориентированным вдоль нормального поля, направление которого в пространстве известно, то редукция к полюсу сведется к определению компонент по формулам (9.19) и (9.17) с последующим применением теоремы вращения. Более подробно с этой трансформацией можно познакомиться в книге В.Баранова [6].

§ 10. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ТРАНСФОРМАЦИИ И ИХ ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ

Несмотря на разнообразие решаемых задач, все трансформации, как было отмечено в предыдущем параграфе, в итоге сводятся к вычислению сумм произведений значений поля в узлах скользящего окна на соответствующие весовые коэффициенты, что дает возможность построить их общую теорию. Эта теория рассматривает трансформации как пространственную фильтрацию наблюдаемых полей.

В соответствии с ней практические трансформации или вычислительные схемы считаются приближениями идеализированных - так называемых теоретических трансформаций. Они в свою очередь определяются как интегралы свертки двух функций, одна из которых **U** описывает наблюдаемое поле, а вторая **K** характеризует вид конкретной теоретической трансформации и называется ее ядром. Для площадного случая теоретическая трансформация может быть представлена в виде

$$U_{\square p}(x,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta, 0) K(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta. \tag{10.1}$$

Для профильного (двумерного) случая, соответственно,

$$U_{\square p}(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, 0) K(\xi - x, z) d\xi. \tag{10.2}$$

Например, интеграл Пуассона (9.8) для аналитического продолжения вверх может рассматриваться как теоретическая трансформация с ядром

$$K(\xi - x, z) = \frac{z}{\pi[(\xi - x)^2 + z^2]}. \tag{10.3}$$

Интеграл (9.17) для расчета горизонтальной компоненты поля по вертикальной также можно считать теоретической трансформацией с ядром

$$K(\xi - x, 0) = \frac{1}{\pi(\xi - x)}. \tag{10.4}$$

Теоретические трансформации удобнее анализировать, перейдя от самих функций к их преобразованиям Фурье.

Функция $U(x)$, измеренная на профиле и подчиняющаяся условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U(x)|^2 dx < +\infty, \tag{10.5}$$

может быть представлена интегралом Фурье в комплексной форме:

$$U(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} U(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi \right] d\omega. \tag{10.6}$$

Этот двойной интеграл фактически сводится к последовательному вычислению двух одинарных:

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(x)e^{-i\omega x} dx \quad (10.7)$$

и

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{i\omega x} d\omega, \quad (10.8)$$

называемых преобразованиями Фурье. Формула (10.7), являющаяся прямым преобразованием Фурье, определяет комплексную функцию $S(\omega)$ - спектр исходной функции $U(x)$. Аргументом спектра является пространственная частота ω , размерность которой обратна размерности расстояния. На практике размерность пространственной частоты обычно принимают равной км^{-1} . Формула (10.8) характеризует обратное преобразование Фурье.

Удобство перехода к спектрам при анализе трансформаций связано с тем, что в соответствии с известной теоремой преобразование Фурье свертки двух функций равно произведению их преобразований Фурье. Применение формулы (10.7) к обеим частям формулы (10.2), определяющей теоретическую профильную трансформацию, дает следующее основное соотношение:

$$S_{\text{тр}}(\omega) = S(\omega)F(\omega). \quad (10.9)$$

Комплексная функция $F(\omega)$, являющаяся преобразованием Фурье ядра, называется частотной характеристикой теоретической трансформации. Из (10.9) следует, что любая теоретическая трансформация сводится к последовательному выполнению трех операций:

- 1) вычисление спектра исходной функции путем ее прямого преобразования Фурье;
- 2) вычисление спектра трансформанты путем умножения спектра исходной функции на частотную характеристику трансформации;
- 3) вычисление трансформанты по ее спектру путем его обратного преобразования Фурье.

Таким образом, трансформации фактически представляют собой пространственную фильтрацию аномальных полей. Все свойства трансформации полностью определяются ее частотной характеристикой, и **анализ профильных трансформаций сводится к анализу их частотных характеристик.**

Полученные выводы можно распространить и на площадные трансформации. Для функции двух переменных $U(x, y)$, удовлетворяющей условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U(x, y)|^2 dx dy < +\infty, \quad (10.10)$$

справедливы следующие соотношения, также называемые преобразованиями Фурье:

$$S(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy, \quad (10.11)$$

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(u, v) e^{i(ux+vy)} dudv. \quad (10.12)$$

В отличие от (10.7) и (10.8) здесь введены две пространственные частоты: u и v , также имеющие размерности км^{-1} . Вместо (10.9) в трехмерном случае можно использовать соотношение

$$S_{\text{тр}}(u, v) = S(u, v)F(u, v). \quad (10.13)$$

Очевидно, что и анализ площадных теоретических трансформаций сводится к анализу их частотных характеристик $F(u, v)$.

Вообще говоря, значение спектрального анализа в гравиразведке и магнито-разведке очень велико. Он используется для решения многих разнообразных задач [26], но здесь мы ограничимся лишь его применением к анализу профильных трансформаций. Прежде, чем рассмотреть их частотные характеристики, необходимо разобратся в том, каковы спектры функций, описывающих аномальные гравитационные и магнитные поля. Спектры аномалий от простых тел могут быть рассчитаны аналитически. В частности спектр аномалии силы тяжести от горизонтального кругового цилиндра радиуса R и с избыточной плотностью σ , расположенного на глубине h под началом координат, можно представить в виде

$$S(\omega) = f\sigma R^2 \pi \sqrt{2\pi} e^{-|\omega|h}, \quad (10.14)$$

где f - гравитационная постоянная. Похожий вид имеет спектр магнитной аномалии Z от такого цилиндра с вертикальной намагниченностью I :

$$S(\omega) = IR^2 \pi \sqrt{2\pi} \omega e^{-|\omega|h}. \quad (10.15)$$

Вообще говоря, спектры полей большинства моделей, расположенных симметрично относительно вертикальной оси, проходящей через начало координат, представляют собой суммы экспонент с показателями, определяемыми глубинами особых точек функций, описывающих эти поля. При $\omega \rightarrow \infty$ вид спектра поля теоретической модели полностью характеризуется глубиной самой верхней особой точки - так называемым параметром H .

Если модель смещена от начала координат, спектр ее поля усложняется. Можно доказать, что спектр S_2 смещенной функции $U_2(x) = U_1(x - \xi)$ связан со спектром исходной функции S_1 следующим соотношением:

$$S_2(\omega) = e^{-i\omega\xi} S_1(\omega). \quad (10.16)$$

Как известно, $e^{-i\omega\xi} = \cos(\omega\xi) - i \sin(\omega\xi)$. Отсюда следует, что и действительная и мнимая части спектра функций, описывающих реальные аномалии, должны иметь вид, похожий на экспоненциально затухающие синусоиды. Поведение спектра при $\omega \rightarrow \infty$ в отсутствии помех также полностью определяется параметром H .

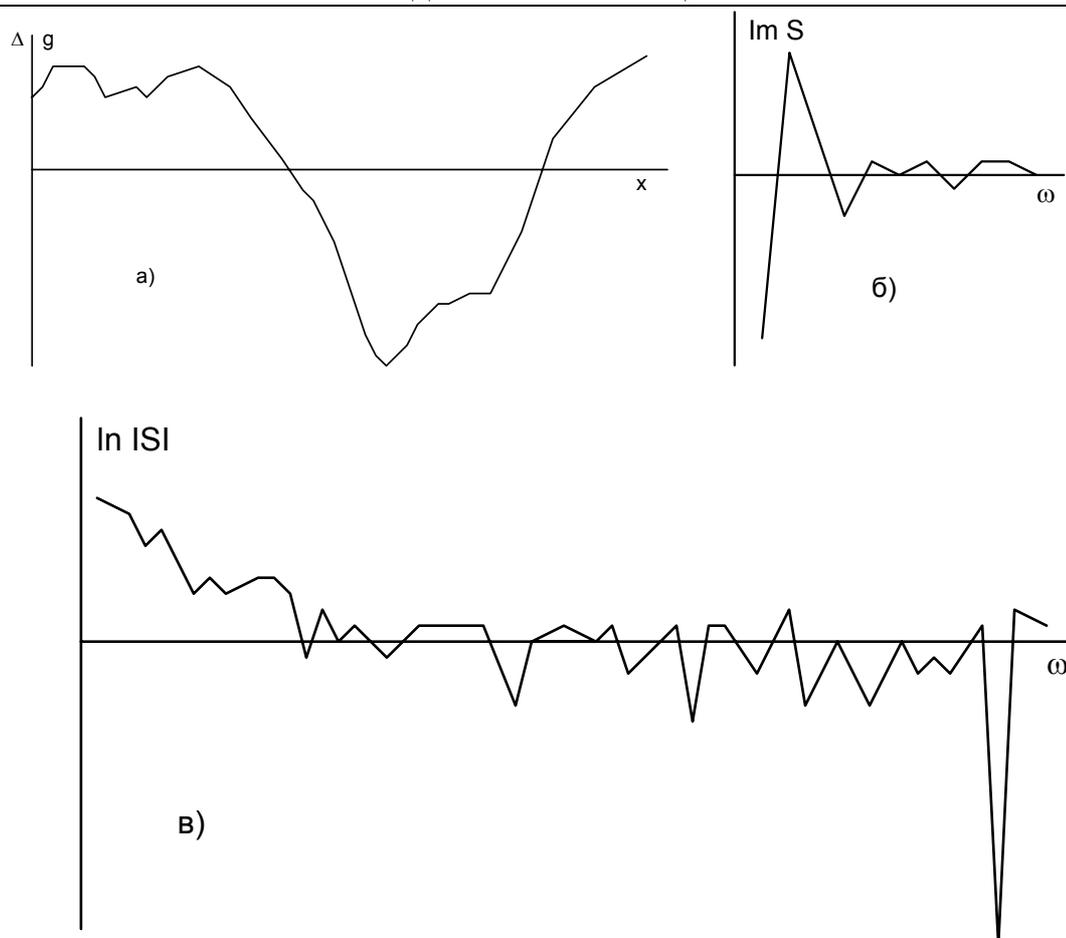


Рис.16. Гравитационная аномалия и ее спектр:

- а) аномалия силы тяжести; б) график мнимой части спектра в линейном масштабе;
в) график логарифма амплитудного спектра.

В качестве примера на рис. 16б приведен график мнимой части спектра реальной гравитационной аномалии, изображенной на рис. 16а. Очевидно, экспоненциальный характер затухания графиков с увеличением частоты мешает их визуальному анализу, поэтому чаще эти графики строят в логарифмическом масштабе. На рис. 16в показан график логарифма модуля спектра этой аномалии. На нем отчетливо видно, что в спектре аномального поля выделяются три части: низкочастотная, среднечастотная и высокочастотная. Низкочастотная часть, отвечающая аномалиям большой протяженности, преимущественно характеризует региональное поле. Среднечастотная часть соответствует в основном локальным аномалиям. Наконец, самая высокочастотная часть связана с помехами от верхней части разреза и с погрешностями съемки. Если не принимать во внимание область помех, можно заметить, что график логарифма амплитудного спектра аппроксимируется на высоких частотах наклонной прямой. Угловым коэффициентом этой прямой равен $-H$. Таким образом, по графику логарифма амплитудного спектра можно достаточно легко определить глубину верхней особой точки функции, описывающей аномальное поле.

Этот прием весьма распространен при количественной интерпретации гравитационных и магнитных аномалий.

Применяя трансформации, интерпретатор может обогатить в спектре трансформанты одну из частей и подавить другие, тем самым выделив региональную или локальную компоненту. Конкретное действие теоретической трансформации полностью определяется ее частотной характеристикой. В таблицу 2 сведены частотные характеристики простейших профильных трансформаций, полученные в результате применения преобразования Фурье к их ядрам. Напомним, что вертикальная ось z считается направленной вверх.

Таблица 2.

Частотные характеристики типовых теоретических профильных трансформаций.

Трансформация	Частотная характеристика
Интегральное осреднение на интервале $(-l,+l)$	$F(\omega) = \frac{\sin \omega l}{\omega l}$
Аналитическое продолжение вверх на высоту h	$F(\omega) = e^{- \omega h}$
Аналитическое продолжение вниз на глубину h	$F(\omega) = e^{ \omega h}$
Вычисление производной по x	$F(\omega) = i\omega$
Вычисление производной по z	$F(\omega) = - \omega $
Вычисление компоненты X по Z	$F(\omega) = -i \cdot \text{sign } \omega$

Отметим, что частотные характеристики аналитического продолжения полей вверх и вниз могут быть описаны единой формулой:

$$F(\omega) = e^{-|\omega|z}. \tag{10.17}$$

На рис. 17 показаны графики модуля частотных характеристик ряда трансформаций. С его помощью легко представить, что происходит со спектром исходной аномалии после умножения на каждую из этих частотных характеристик в результате трансформирования. В частности, на нем видно, что частотные характеристики некоторых трансформаций, таких как осреднение или аналитическое продолжение вверх, при $\omega \rightarrow \infty$ стремятся к нулю или же не превышают по модулю единицы. Эти трансформации подавляют высокочастотную помеху и являются устойчивыми. Частотные характеристики других трансформаций, таких как аналитическое продолжение вниз или расчет высших производных, при $\omega \rightarrow \infty$ стремятся к бесконечности. Такие трансформации усиливают высокочастотную помеху и являются неустойчи-

выми, следовательно, некорректными. Естественно, их практическое применение должно сопровождаться защитой от помех, что осуществляется различными способами.

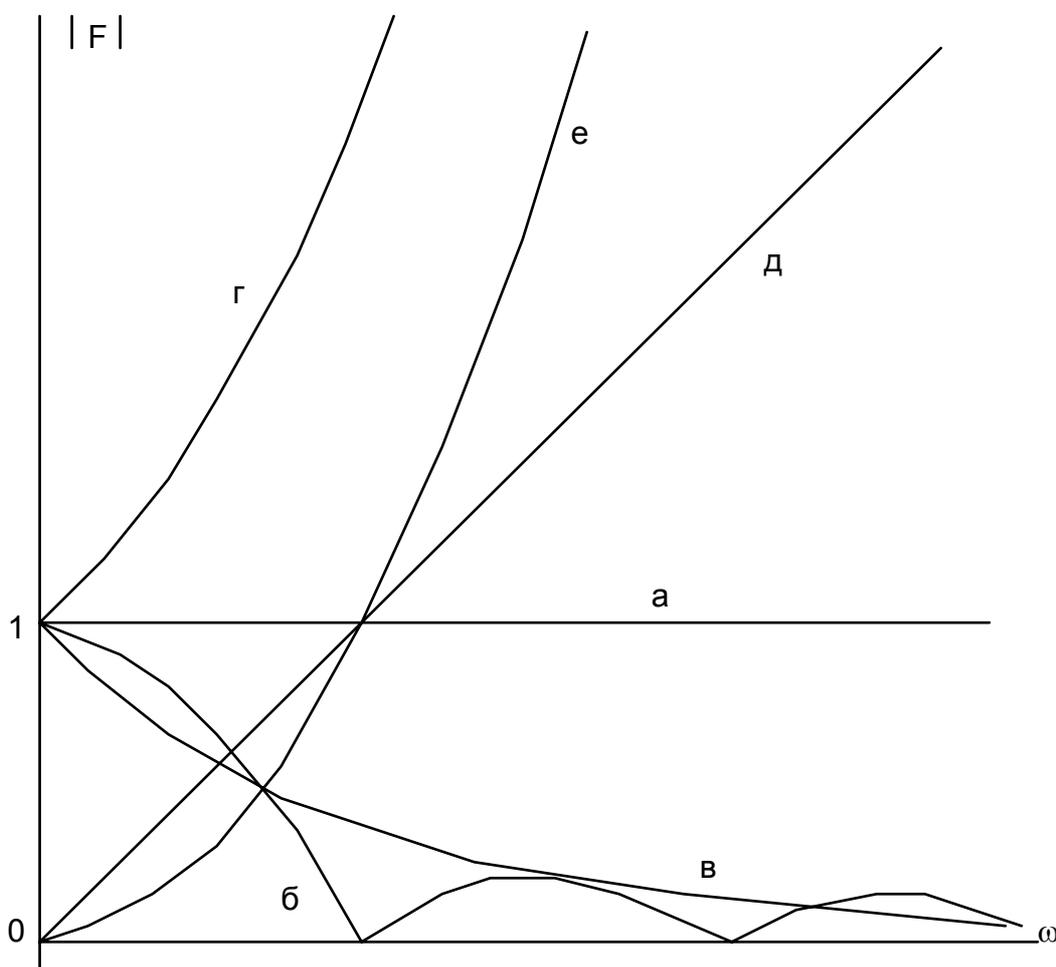


Рис. 17. Графики модуля частотных характеристик типовых трансформаций:
 а) вычисление комплексно сопряженной компоненты; б) осреднение;
 в) аналитическое продолжение вверх; г) аналитическое продолжение вниз;
 д) вычисление первой производной; е) вычисление второй производной.

Более сложные трансформации сводятся к последовательному применению нескольких элементарных. При этом из соотношения (10.9) следует, что частотная характеристика такой трансформации представляет собой произведение частотных характеристик составляющих ее трансформаций:

$$F(\omega) = \prod_{i=1}^n F_i(\omega). \quad (10.18)$$

Применение сложных трансформаций расширяет возможности интерпретатора, дает возможность конструировать фильтры с заданными свойствами. На рис. 18 показаны графики модуля частотной характеристики трансформации, представляющей

собой вычисление первой производной с последующим аналитическим продолжением вверх. Как видно, эта трансформация подчеркивает среднечастотную часть спектра, причем меняя высоту продолжения можно регулировать частоту, соответствующую экстремуму ее частотной характеристики.

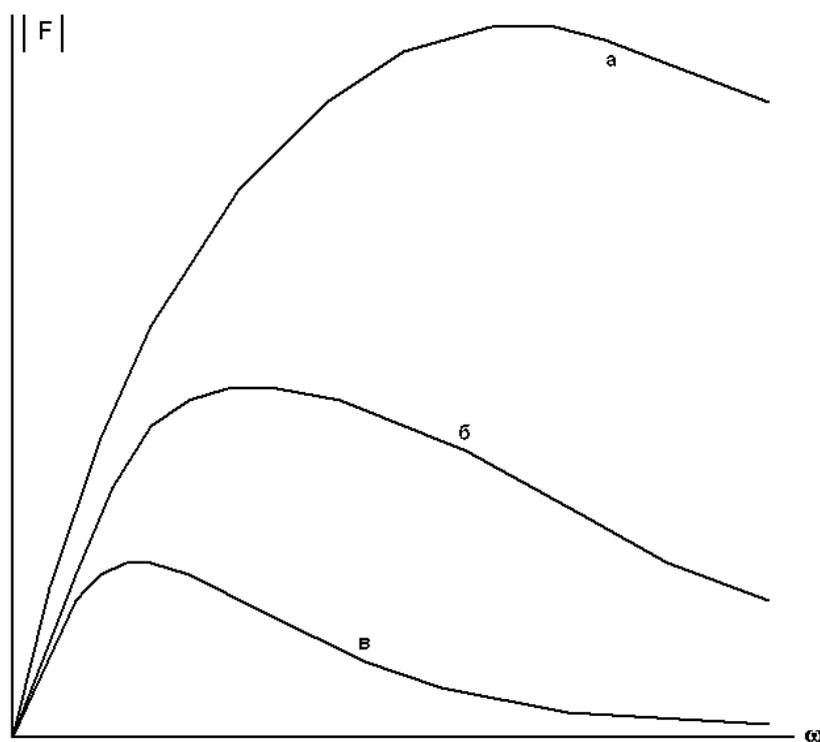


Рис. 18. Графики модуля частотных характеристик дифференцирования поля с последующим аналитическим продолжением на разные высоты:
а) 0,5 км; б) 1 км; в) 2 км.

Подобные трансформации, выделяющие среднечастотную часть спектра, интересны тем, что их в определенных условиях можно считать настроенными на подчеркивание аномалий от объектов, лежащих в некотором диапазоне глубин. Будем считать, что двумерное аномальное поле связано исключительно с линейными массами, расположенными на различных глубинах. Тогда в разных интервалах спектра будут преобладать влияния разных масс: на более низких частотах - залегающих на большей глубине, на более высоких - залегающих на меньшей глубине. Аналитическое рассмотрение этой проблемы приводит к понятию глубинной характеристики трансформации $\mathbf{M}(z)$.

Глубинная характеристика трансформации связывается с ее частотной характеристикой на основе преобразования Лапласа следующим образом:

$$\mathbf{M}(z) = \int_0^{\infty} \mathbf{F}(\omega) \omega e^{-\omega z} d\omega. \quad (10.19)$$

Наиболее простая из теоретических трансформаций - тождественная, преобразующая исходное поле само в себя. Ее частотная характеристика, очевидно, $F(\omega) \equiv 1$, тогда в соответствии с (10.19) ее глубинная характеристика, обозначаемая $M_0(z)$, будет равна

$$M_0(z) = \int_0^{\infty} \omega e^{-\omega z} d\omega = \frac{1}{z^2}. \quad (10.20)$$

Для анализа трансформаций обычно применяют относительную глубинную характеристику, вычисляемую по формуле

$$N(z) = \frac{M(z)}{M_0(z)} = z^2 M(z). \quad (10.21)$$

Построив графики относительных глубинных характеристик типовых трансформаций, можно убедиться, что те из них, которые подчеркивают низкочастотную часть спектра поля, например, осреднение и аналитическое продолжение вверх, более чувствительны к глубокозалегающим массам. Те же, которые подчеркивают высокочастотную часть спектра поля, то есть вычисление высших производных и аналитическое продолжение вниз - более чувствительны к неглубокозалегающим массам. Трансформация, включающая дифференцирование поля и последующее аналитическое продолжение вверх, будет иметь относительную глубинную характеристику с экстремумом на глубине, зависящей от высоты продолжения. Таким же свойством обладает и площадная трансформация Саксова-Ниггарда (9.3), сводящаяся к вычислению разности средних значений на окружностях с радиусами R_1 и R_2 . Если обозначить $n = R_1/R_2$, то глубину экстремума ее относительной глубинной характеристики можно определить по формуле:

$$z = R_2 \sqrt{\frac{n^{0,8} - n^2}{1 - n^{0,8}}}. \quad (10.22)$$

Трансформации типа Саксова-Ниггарда, имеющие экстремум на графике относительной глубинной характеристики, часто применяют на ранних этапах интерпретации при выборе начальной модели изучаемых объектов. Для этого на интерпретационном профиле проводят эту трансформацию несколько раз с такими параметрами, которые отвечают разным глубинам экстремума ее относительной глубинной характеристики. По результатам вычислений строят разрез и на него под каждой точкой наблюдения помещают несколько точек на глубинах, отвечающих всем этим экстремумам. Точкам ставят в соответствие значения вычисленных трансформант. Другими словами, каждое значение трансформанты относят к точке пространства, расположенной под центром скользящего окна на глубине, равной глубине экстремума относительной глубинной характеристики. Далее на разрезе строят линии равных значений трансформант. Если аномалия действительно вызвана замкнутым

локальным объектом, эти изолинии в некоторой степени отражают поведение объекта. Очевидно, таким приемом, как и вообще глубинными характеристиками, следует пользоваться с осторожностью, помня о неединственности решения обратной задачи. Пример с конхойдой Слюза, приведенный в первой главе, должен убедить в том, что эквивалентные поля могут создаваться объектами, лежащими на разных и сильно отличающихся глубинах.

Важной областью применения трансформаций является совместный анализ гравитационных и магнитных аномалий. Как было отмечено выше, при геологическом истолковании полей необходимо учитывать, вызваны ли обнаруженные гравитационные и магнитные аномалии одним источником или разными. Соотношение Пуассона, связывающее гравитационный и магнитный потенциалы однородных и однородно намагниченных тел [8], указывает на то, что в случае единой природы источника магнитная аномалия будет вести себя как линейная комбинация градиентов гравитационной аномалии. Для проверки этого, например, можно построить график следующего отношения:

$$\frac{S_Z^2(\omega)}{\omega^2 S_{\Delta g}^2(\omega)} \quad (10.23)$$

в зависимости от частоты. В знаменателе, как следует из (10.9), фактически располагается квадрат спектра градиента силы тяжести. Поэтому, если аномальные поля удовлетворяют соотношению Пуассона, то есть гравитационная и магнитная аномалии вызваны одним источником, построенный график теоретически должен быть на всех частотах близок к тождественной постоянной. Более подробно с применением спектрального вида соотношения Пуассона для совместного анализа гравитационных и магнитных аномалий можно познакомиться по книге С.А.Серкерова [26].

§ 11. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ ТРАНСФОРМАЦИЙ

На практике, очевидно, применяют не теоретические трансформации, а их приближения, то есть вычислительные схемы, которые сводятся к расчету сумм произведений значений поля в узлах скользящего окна на соответствующие весовые коэффициенты. Частотная характеристика вычислительной схемы, естественно, отличается от частотной характеристики приближаемой теоретической трансформации. Отсюда следует необходимость анализа тех искажений, которые каждая из вычислительных схем вносит в теоретическую частотную характеристику и разработки приемов повышения их устойчивости.

Рассмотрим особенности частотных характеристик вычислительных схем профильных трансформаций, предназначенных для фильтрации двумерных полей. Как

было отмечено в § 9, большинство таких трансформаций имеет типовой вид: они могут быть описаны единой формулой:

$$U_{\text{тр}}(0) = k_0 U(0) + \sum_{i=1}^N k_i \overline{U(R_i)}, \quad (11.1)$$

где

$$\overline{U(R)} = 0,5[U(-R) + U(+R)] \quad (11.2)$$

означает осреднение по двум точкам, расположенным на расстоянии R слева и справа от центра скользящего окна. Следовательно, и частотные характеристики этих вычислительных схем имеют типовой вид. Если рассматривать формулу (11.2) как трансформацию, она также должна иметь свою частотную характеристику, которую легко вычислить, используя формулу (10.16) для спектра смещенной функции. Поскольку преобразование Фурье суммы двух функций равно сумме их преобразований Фурье, данная частотная характеристика будет следующей:

$$F(\omega) = 0,5(e^{i\omega R} + e^{-i\omega R}) = \cos \omega R. \quad (11.3)$$

Применяя (11.3) к (11.1), легко убедиться, что частотная характеристика профильной трансформации может быть представлена в следующей форме:

$$F(\omega) = k_0 + \sum_{i=1}^N k_i \cos(\omega R_i). \quad (11.4)$$

Из формулы (11.4) следует, что частотные характеристики вычислительных схем являются периодическими функциями и тем самым принципиально отличаются от своих теоретических прототипов. Для того, чтобы разобраться в характере различий, обратимся к примеру. На рис. 19 показаны графики частотных характеристик теоретической трансформации, заключающейся в вычислении второй горизонтальной производной, и четырех представляющих ее вычислительных схем на базе формулы (9.13), приведенной в § 9. Схемы различаются расстоянием Δx между точками в пятиточечном скользящем окне и, следовательно, размерами окна.

Полученные результаты являются типичными для трансформаций и указывают на следующие закономерности.

1. Частотные характеристики вычислительных схем практически совпадают с частотными характеристиками теоретических трансформаций лишь в пределах некоторого интервала пространственных частот: от нуля до некоторой граничной частоты ω_r , а вне его - принципиально различаются, являясь периодическими функциями.

2. Изменяя параметры вычислительных схем, можно регулировать ω_r , а также положение максимумов и минимумов их частотных характеристик в разных диапазонах пространственных частот.

3. Вычислительные схемы могут быть устойчивыми, несмотря на неустойчивость приближаемых ими теоретических трансформаций

4. Для повышения устойчивости трансформаций надо выбирать такие параметры применяемой вычислительной схемы, чтобы интервал помех примерно совпадал с интервалом, где ее частотная характеристика имеет минимум.

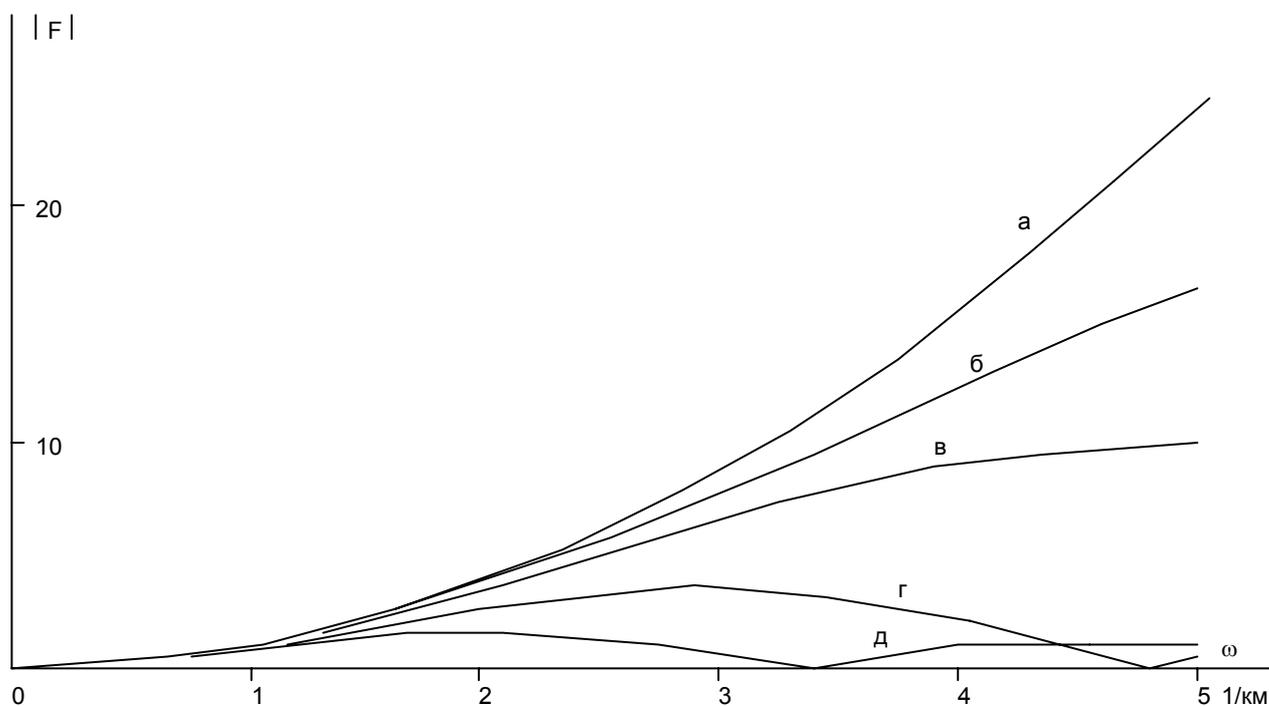


Рис. 19. Частотные характеристики вычисления второй горизонтальной производной: а) теоретическая; б-д) вычислительной схемы (9.13) при разных параметрах Δx : б) 0,2 км; в) 0,3 км; г) 0,5 км; д) 0,7 км.

Зная отмеченные закономерности и проанализировав спектр трансформируемой аномалии, всегда можно выбрать подходящую вычислительную схему. Обратим внимание на то, что формула (11.4) фактически представляет собой отрезок разложения частотной характеристики теоретической трансформации в ряд Фурье по косинусам. Отсюда следует широко распространенная методика построения вычислительных схем, с помощью которой получено большинство вычислительных формул, в том числе приведенных в § 9. Данная методика включает несколько этапов. Вначале частотная характеристика теоретической трансформации раскладывается в ряд Фурье по косинусам. Затем этот ряд ограничивается несколькими членами, в результате чего определяются расстояния до узлов практической трансформации и весовые коэффициенты в них. Сопоставление теоретической частотной характеристики с частотными характеристиками вычислительных схем, получаемых при разном числе членов ряда и расстояний между узлами, позволяет выбрать ту из них, которая обладает требуемыми свойствами.

В настоящее время трансформации преимущественно выполняются на компьютерах, что позволяет применять более совершенные способы выбора оптимальных параметров вычислительных схем. Основной базой применяемых алгоритмов являются тригонометрические полиномы, то есть отрезки рядов Фурье. Пусть исходное поле задано на профиле длиной L с равномерным шагом. Тогда его можно представить в виде бесконечного ряда Фурье:

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n x}{L} + B_n \sin \frac{\pi n x}{L} \right), \quad (11.5)$$

при этом подразумевается, что за пределами отрезка наблюдений поле периодически повторяется. Дополнительно предположив характер повторения как четно или нечетно симметричный, в (11.5) можно опустить ту часть, которая имеет другой тип симметрии и тем самым упростить вычисления. Коэффициенты разложения рассчитываются по известным формулам

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L U(x) \cos \frac{\pi n x}{L} dx \quad (11.6)$$

и

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L U(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx \quad (11.7)$$

любым численным методом. Если результаты трансформации в дальнейшем не надо использовать при количественной интерпретации, для расчета коэффициентов можно воспользоваться простейшим и наименее точным способом прямоугольников. Его преимущества в скорости вычислений проявляются особенно ярко в случае применения алгоритмов так называемого быстрого преобразования Фурье. Если же результаты трансформации требуются для количественных оценок, быстрого преобразования Фурье, как и вообще способа прямоугольников лучше избегать и пользоваться медленными, но более точными численными методами.

На практике, очевидно, бесконечное число коэффициентов не может быть определено, поэтому оно ограничивается некоторым номером N :

$$U(x) = \sum_{n=0}^N \left(A_n \cos \frac{\pi n x}{L} + B_n \sin \frac{\pi n x}{L} \right), \quad (11.8)$$

тем самым ряд Фурье превращается в тригонометрический полином. Формулу (11.8) можно рассматривать как результат применения к ряду (11.5) прямоугольного фильтра. Хотя подобная фильтрация уничтожает высокочастотную часть спектра, она не всегда приводит к хорошим результатам, поэтому в (11.8) вводят дополнительные фильтры. Одним из наиболее распространенных является фильтр вида

$$\left(\frac{\sin \frac{\pi n}{N}}{\frac{\pi n}{N}} \right)^2, \quad (11.9)$$

после умножения на него формула (11.8) становится удобной для практических вычислений.

Для получения трансформант коэффициенты в (11.8) домножаются на соответствующие частотные характеристики. Так для аналитического продолжения на высоту z вычислительная формула принимает вид:

$$U(x, z) = \sum_{n=0}^N \left(A_n \cos \frac{\pi n x}{L} + B_n \sin \frac{\pi n x}{L} \right) e^{-\frac{\pi z}{L}} \left(\frac{\sin \frac{\pi n}{N}}{\frac{\pi n}{N}} \right)^2. \quad (11.10)$$

Если продифференцировать ее по x или по z , легко получить аналогичные формулы для вычисления горизонтального или вертикального градиентов поля на разных высотах, устойчивые к помехам.

Еще более устойчивые вычислительные схемы могут быть построены на базе тригонометрических полиномов с применением метода регуляризации. Допустим для простоты записи, не уменьшающей общности подхода, что подразумеваемое периодическое продолжение исходного поля за пределы интерпретируемого отрезка профиля является нечетно симметричным. Это значит, что для вычисления трансформант мы будем использовать следующий ряд

$$U_{\text{тр}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n x}{L}, \quad (11.11)$$

где коэффициенты C_n получены умножением коэффициентов разложения исходного поля B_n на соответствующую частотную характеристику. Если трансформация неустойчива, и ее частотная характеристика стремится к бесконечности при $\omega \rightarrow \infty$, ряд (11.11) окажется медленно сходящимся или вообще расходящимся. Следовательно, в этом случае ограничение числа членов ряда при переходе к тригонометрическому полиному может привести к большим погрешностям. Для регуляризации получаемого решения C_n заменяют на близкие к ним коэффициенты D_n , быстрее убывающие с ростом номера n .

В соответствии с методом регуляризации это приводит к следующей условно-экстремальной задаче: найти минимум стабилизатора

$$\Omega(D_n) = \sum_{n=1}^N q_n D_n^2 \quad (11.12)$$

при условии, что коэффициенты C_n и D_n близки друг к другу, то есть

$$\sum_{n=1}^N (C_n - D_n)^2 \leq \delta^2. \quad (11.13)$$

Весовые коэффициенты q_n в стабилизаторе (11.12) представляют собой положительные числа, стремящиеся к бесконечности при $n \rightarrow \infty$ как $n^{2+\varepsilon}$, где $\varepsilon \geq 0$. С этими весовыми коэффициентами стабилизатор фактически накладывает на решение штраф за плохую сходимость. В § 4 было рассмотрено, как свести исходную условно-экстремальную задачу к безусловно-экстремальной. Для этого надо найти минимум следующей функции Тихонова:

$$M^\alpha(D_n) = \sum_{n=1}^N (C_n - D_n)^2 + \alpha \sum_{n=1}^N q_n D_n^2. \quad (11.14)$$

Необходимые условия экстремума функции состоят в равенстве нулю всех ее частных производных по искомым параметрам. Таким образом, коэффициент D_n может быть найден из уравнения $D_n - C_n + \alpha q_n D_n = 0$, то есть

$$D_n = \frac{C_n}{1 + \alpha q_n}. \quad (11.15)$$

Поскольку коэффициенты C_n получены умножением коэффициентов разложения исходного поля B_n на частотную характеристику трансформации $F(\omega)$, формулу (11.15) можно трактовать как дискретизацию регуляризированной частотной характеристики трансформации, представимой в следующем общем виде:

$$F(\omega) = \frac{F(\omega)}{1 + \alpha Q(\omega)}. \quad (11.16)$$

Здесь $Q(\omega)$ - весовая функция, стремящаяся к бесконечности при $\omega \rightarrow \infty$ и выполняющая ту же роль, что весовые коэффициенты в (11.15).

К настоящему времени разработано довольно много способов регуляризации этой задачи, различающихся весовыми функциями. А.Н.Тихонов предложил для этой цели весовую функцию в виде квадрата модуля самой частотной характеристики, то есть следующую регуляризованную частотную характеристику:

$$F(\omega) = \frac{F(\omega)}{1 + \alpha |F(\omega)|^2}. \quad (11.17)$$

Несколько способов регуляризации предложил В.Н.Страхов, в частности с использованием производных вплоть до n -го порядка (так называемую регуляризацию n -го порядка)

$$F(\omega) = \frac{F(\omega)}{1 + \alpha (th^2 \omega)^n |F(\omega)|^2}, \quad (11.18)$$

а также адаптивную регуляризацию, учитывающую спектр конкретной трансформируемой функции

$$F(\omega) = \frac{F(\omega)|S(\omega)|^2}{|S(\omega)|^2 + \alpha|F(\omega)|^2}. \quad (11.19)$$

Все эти способы используют перебор результатов при изменении α по геометрической прогрессии (4.14) и выбор оптимального параметра регуляризации, исходя либо из критерия невязки, либо из критерия Тихонова-Гласко, изложенных в § 4.

Изложенные способы повышения устойчивости вычислительных схем относятся к так называемому детерминистскому направлению в трансформациях потенциальных полей. Другое интенсивно развиваемое направление в трансформациях - вероятностно-статистическое. Оно базируется на представлениях о сложных гравитационных и магнитных аномалиях как о случайных функциях, что позволяет привлечь для их обнаружения и разделения статистическую теорию оптимальной фильтрации. Под оптимизацией понимают построение таких вычислительных схем, которые удовлетворяют некоторому принятому критерию их качества. В настоящее время на практике используют преимущественно три таких критерия:

- 1) минимум среднеквадратического отклонения трансформанты от априорно заданной функции (критерий Колмогорова-Винера);
- 2) максимум пикового отношения трансформанты к помехе;
- 3) максимум энергетического отношения трансформанты к помехе.

На базе указанных критериев разработаны многочисленные вычислительные схемы, изучение которых проводится в рамках курса "Теоретические основы обработки геофизической информации". Детально ознакомиться с достижениями вероятностно-статистического направления в трансформациях можно по учебнику А.А.Никитина [25] и по книге С.А.Серкорова [26].

ГЛАВА 4. АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СПОСОБЫ РАЗДЕЛЕНИЯ АНОМАЛИЙ

§ 12. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ В РАЗДЕЛЕНИИ ПОЛЕЙ

Способы, базирующиеся на детально разработанных в численном анализе методах интерполяции и экстраполяции функций, весьма широко используются для разделения гравитационных и магнитных аномалий. Интерполяционные способы применяют для разделения региональных и локальных аномалий, когда размеры их в плане существенно различаются, и локальные аномалии находятся на столь большом расстоянии друг от друга, что между ними оказываются промежутки, где наблюденное поле фактически представлено одним региональным фоном. В этом случае на некоторой площади: большей, чем площадь локальной аномалии, но значительно меньшей площади регионального фона, последний может быть достаточно точно аппроксимирован алгебраическим или тригонометрическим полиномом невысокой степени. Там, где заведомо нет локальных аномалий и интенсивных помех, выбирают несколько узловых точек и определяют коэффициенты полинома, строго проходящего через эти точки. Вычисление значений этого интерполяционного полинома в точках участка, где есть локальная аномалия, дает функцию, близкую к региональному фону. Вычитая эти значения из наблюденных, интерпретатор получает локальные аномалии.

Недостатком подобных способов разделения является их слабая помехозащищенность, связанная с требованием строгого прохождения полинома через узловые точки. Если в этих точках есть помехи, они могут оказать пагубное влияние на результаты. Для их подавления до интерполяции зачастую проводят предварительное сглаживание исходного поля.

Построение алгебраического интерполяционного полинома, то есть функции вида $a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + \dots$, сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно его коэффициентов. Эта система получается из условия совпадения значений полинома со значениями исходной функции в заданных узлах. Естественно, число определяемых коэффициентов, характеризующее степень многочлена, должно быть равно числу узлов. Аналогично строится и тригонометрический интерполяционный полином.

Наиболее просто построение алгебраического интерполяционного полинома для профильных наблюдений. Здесь широко применяется методика, предложенная Лагранжем и дающая возможность получить решение в явном виде, обойдясь без решения системы уравнений. В соответствии с ней через $n+1$ узловую точку проводится следующий многочлен n -ой степени:

$$U_{\text{пер}}(x) = L_1(x)U(x_1) + L_2(x)U(x_2) + \dots + L_{n+1}(x)U(x_{n+1}), \quad (12.1)$$

где x_i - координаты заданных узловых точек, $U(x_i)$ - значения наблюдаемого поля в них, а $L_i(x)$ - фундаментальный полином Лагранжа n -ой степени для i -ой узловой точки, вычисляемый по формуле

$$L_i(x) = \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_{n+1})}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{n+1})}. \quad (12.2)$$

Напомним, что график любого алгебраического многочлена называют параболой, поэтому интерполяцию с помощью алгебраических полиномов часто называют параболической интерполяцией. На рис. 20 показан пример выделения локального гравитационного минимума, связанного с нефтеносной структурой, с помощью параболической интерполяции.

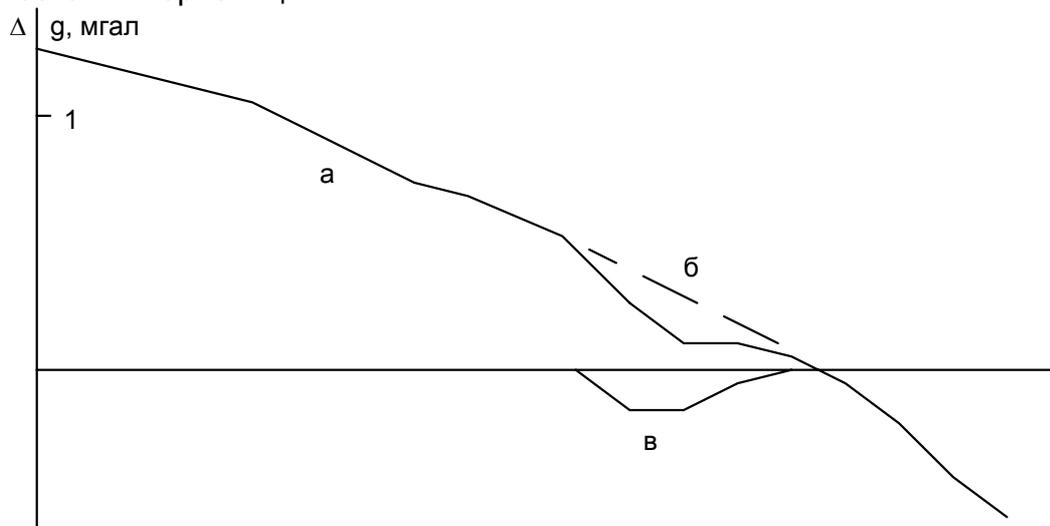


Рис. 20. Выделение локальной аномалии от нефтеносной структуры с помощью параболической интерполяции: а) исходное гравитационное поле; б) региональный фон; в) локальная аномалия.

Параболическая экстраполяция применяется в случаях, когда требуется получить значения поля на продолжении профилей или площадей измерений. Это может, например, понадобиться, если измерения на интерпретируемом профиле обрываются у препятствия: у озера, у реки, у берега моря и т. д. Вместе с тем, методы, базирующиеся на полиномиальной аппроксимации, - не вполне точны. Гораздо более хорошие результаты дают способы, учитывающие гармоничность экстраполируемых функций. Ряд таких способов, интерполяции и экстраполяции предложил Ю.В.Антонов [3].

Предположим, что наблюдаемое поле задано на отрицательной половине оси абсцисс при $-\infty < x \leq 0$ и требуется экстраполировать его на положительную половину оси. Для этого на некоторой высоте h над профилем определим гармоническую функцию $U(x, h)$, которая, будучи аналитически продолжена вниз на уровень наблюдений, совпадет на отрицательной полуоси с исходным полем. Как было рас-

смотрено ранее, аналитическое продолжение поля вверх сводится к вычислению интеграла Пуассона (9.8), который в требуемых обозначениях можно переписать как

$$U(x, h) = \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\xi, 0) d\xi}{(\xi - x)^2 + h^2}. \quad (12.1)$$

Пересчет вниз может быть проведен с помощью этого же соотношения, которое надо рассматривать как интегральное уравнение, поскольку неизвестная функция находится под знаком интеграла. Решение уравнения для точки в начале координат может быть получено в следующем замкнутом виде [3]:

$$U(0,0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, h) K(x, h) dx, \quad (12.2)$$

где

$$K(x, h) = \int_0^{\infty} e^{-\omega h} \cos(\omega x) d\omega. \quad (12.3)$$

Подставим в (12.2) вместо $U(x, h)$ его выражение из (12.1):

$$U(0,0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\xi, 0) d\xi}{(\xi - x)^2 + h^2} \right] K(x, h) dx. \quad (12.4)$$

Интеграл в квадратных скобках можно представить в виде суммы интегралов:

$$U(0,0) = \frac{h}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^0 \frac{U(\xi, 0) d\xi}{(\xi - x)^2 + h^2} + \int_0^{\infty} \frac{U(\xi, 0) d\xi}{(\xi - x)^2 + h^2} + \right] K(x, h) dx, \quad (12.5)$$

причем первый из них является интегралом от известной функции на отрицательной части полуоси, а второй содержит искомую ее часть. Тем самым соотношение (12.5) является интегральным уравнением, с помощью которого можно решать задачу экстраполяции гармонических функций. Для его численного решения интегралы аппроксимируются суммами, в результате чего интегральное уравнение сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов получающихся квадратурных формул. С деталями изложенного подхода можно познакомиться по книге Ю.В.Антонова [3].

На рис. 21 показан взятый из книги [3] пример экстраполяции аномалии силы тяжести, проведенной изложенным способом, в сравнении с реально наблюдаемым полем. Поле, наблюдаемое на отрицательной половине оси абсцисс было экстраполировано на положительную половину оси. Полученное поле достаточно близко к реально наблюдаемому там, что показывает эффективность данного подхода.

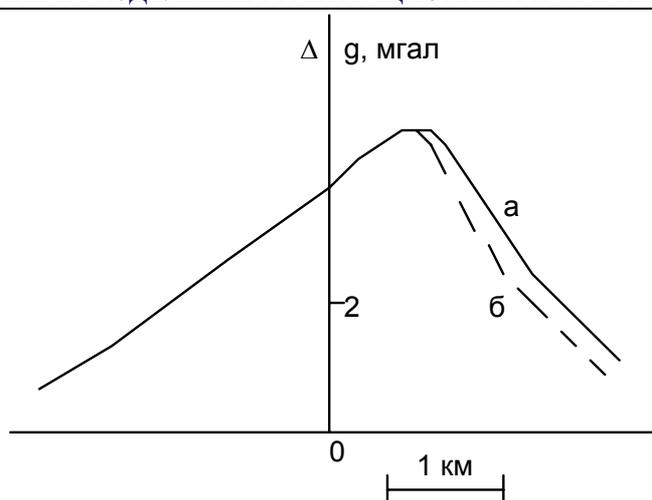


Рис. 21. Экстраполяция гравитационной аномалии: а) экстраполированное поле; б) наблюдаемое поле.

Экстраполяция гармонических функций с помощью данного алгоритма может проводиться не только в горизонтальном направлении, но также в вертикальном и наклонном, что приводит к многочисленным способам разделения полей. Ю.В.Антонов предложил для этого следующую процедуру. Пусть некоторый элемент исходного поля задан на бесконечном горизонтальном профиле. Тогда с помощью интеграла Пуассона его можно аналитически продолжить вверх, причем, достаточно устойчиво. Следовательно, по исходным данным можно вычислить само поле, либо какие-либо другие его элементы, например, высшие производные, на вертикальных полуосях. Экстраполируя эти функции вниз, при определенных условиях можно получить информацию о распределении источников поля. Надо отметить, что экстраполированная вниз функция не совпадает ни с реальным полем, ни с аналитическим продолжением.

Пусть наблюдаемое поле представляет собой, например, сумму гравитационных аномалий g_z двух изолированных объектов, разнесенных по горизонтали, и требуется разделить эти аномалии. Выберем на профиле точку в промежутке между ними и проведем через нее вертикальную ось, не пересекающую ни один из объектов. Такую точку часто можно выбрать, анализируя само поле и его трансформанты, в частности, градиенты. Если объекты очень близки друг к другу, для выбора точки требуется априорная информация. Вычислим g_z на вертикальной оси, для чего в верхней ее части воспользуемся аналитическим продолжением, а в нижней — экстраполяцией сверху. Эта функция является суммой аномалий g_z от каждого из тел.

Далее на той же вертикальной оси аналогично вычислим комплексно сопряженную к g_z функцию g_x . Поскольку ось расположена между объектами, и их притяжение направлено в разные стороны, эта функция является разностью аномалий g_x

от каждого из тел. Ее можно трансформировать, пересчитав назад в g_z , но теперь пересчитанная функция, унаследовав свойства g_x , также будет представлять собой разность аномалий g_z от каждого из тел.

Таким образом, в результате указанных операций в каждой точке вертикальной оси можно определить сумму и разность аномалий g_z от каждого из тел, что позволяет разделить их, решая систему двух уравнений. Очевидно, с точки зрения описанных пересчетов вертикальная и горизонтальная оси - равноправны. Это значит, что, зная аномалии от объектов на вертикальной оси, обратным пересчетом можно определить их и на исходной горизонтальной оси, тем самым завершив разделение. Так же можно разделять и магнитные аномалии, конечно, с учетом перечисленных в § 6 условий.

Таблица 3.

Коэффициенты $C_i^j \cdot 10^4$ для вычислительной схемы (12.6) при $H/h=1/3$

i \ j	-5	-4	-3	-2	-1	0
-5	68	71	72	68	56	18
-4	125	127	124	114	88	22
-3	223	218	199	164	99	-37
-2	275	213	102	-62	-308	-742
-1	-1096	-1526	-2162	-3020	-4221	-6064
0	-1672	-1300	-612	436	2077	5000
1	2788	3132	3556	4124	4932	6064
2	393	436	486	558	658	742
3	15	21	30	42	55	37
4	-17	-15	-10	-6	-2	-22
5	-17	-15	-10	-6	-4	-18

Опробование изложенного способа на моделях показало, что оптимальной для разделения является оцифровка исходных данных с шагом, равным одной трети глубины залегания центра масс системы объектов h . В итоге все требуемые преобразования сведены Ю.В.Антоновым к единой квадратурной 11-точечной формуле:

$$g_z^B(-j) = \sum_{i=-5}^{+5} C_i^j g_z(i). \quad (12.6)$$

Коэффициенты C_i^j в зависимости от отношения H/h , где H - глубина верхней кромки объектов, сведены в таблицы. Формула (12.6) позволяет вычислить аномалию от правого объекта (расположенного в квадранте В) в центре (при $j=0$) и в пяти точках слева от центра (над объектом в квадранте А). Для вычисления аномалии от объекта из квадранта А в точках квадранта В знаки перед i и j в формуле (12.6) меняются

на противоположные, то есть коэффициенты в схеме разворачиваются в обратном порядке. Другая компонента в точках рассчитывается вычитанием полученных данных из наблюдаемых, после чего из четырех частей соединением крест накрест получаются два графика разделенных аномалий. Благодаря простоте, этот способ широко применяется для экспресс-разделения в полевых условиях. В таблице 3 представлены коэффициенты для одного из вариантов при $H/h=1/3$. Таблицы для других параметров можно найти в книге [3] и в справочнике [13].

§ 13. РАЗДЕЛЕНИЕ АНОМАЛИЙ С ПОМОЩЬЮ ТРЕНД-АНАЛИЗА

Одной из наиболее популярных групп аппроксимационных способов разделения гравитационных и магнитных аномалий является так называемый тренд-анализ. Он заключается в аппроксимации регионального фона на всем участке наблюдений единой функцией из некоторого класса - трендом или регрессионной поверхностью. После вычитания этого фона из наблюдаемого поля получаются близкие к локальным остаточные аномалии. Наиболее распространено применение в качестве тренда алгебраических полиномов невысокой степени.

Будем считать, что региональный фон, связанный с глубоко залегающими геологическими структурами, в пределах всей изучаемой площади достаточно хорошо аппроксимируется алгебраическим полиномом вида

$$U_{\text{пер}}(x, y) = \sum_{q,s=0}^n a_{qs} x^q y^s, \quad (13.1)$$

где $0 < q+s \leq n$. Определим коэффициенты этого полинома a_{qs} с помощью метода квазирешений из условия минимума квадрата невязки:

$$\Phi(a_{qs}) = \sum_{k=1}^m \left[U(x_k, y_k) - \sum_{q,s=0}^n a_{qs} x_k^q y_k^s \right]^2 = \min. \quad (13.2)$$

Чтобы квазирешение получилось достаточно устойчивым, число определяемых коэффициентов (в данном случае $n+1$) должно быть значительно меньше числа точек наблюдения m , где известны значения поля U . Как было показано в § 3, эта задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно a_{qs} . Далее, зная эти параметры, можно во всех точках изучаемого участка вычислить региональный фон по формуле (13.2) и найти локальную аномалию:

$$U_{\text{лок}} = U - U_{\text{пер}}$$

Важнейшим в тренд-анализе является вопрос о выборе оптимальной степени аппроксимирующего многочлена, то есть величины n . Обычно такое разделение проводят несколько раз, увеличивая размерность полинома и анализируя получающиеся локальные аномалии. Если разделение производится исключительно в целях

обнаружения локальных аномалий, достаточно визуального контроля результатов. Если же выделенные аномалии предполагается анализировать более тщательно, можно пользоваться рядом критериев, среди которых, как и в корреляционных способах разделения, преобладают связанные с минимумом дисперсии локальной составляющей. Особенности дисперсионного анализа трендов изучаются в курсе "Теоретические основы обработки геофизической информации".

На рис. 22 представлен пример применения тренд-анализа для разделения гравитационных аномалий в регионе, перспективном с точки зрения нефтегазоносности. Региональный фон здесь был аппроксимирован полиномом второй степени, что привело к результатам, показанным на рис. 22б. Вычитание этого фона седлообразной формы из наблюдаемого поля позволило выделить локальные аномалии от перспективных структур, схематически изображенные на рис. 22в.

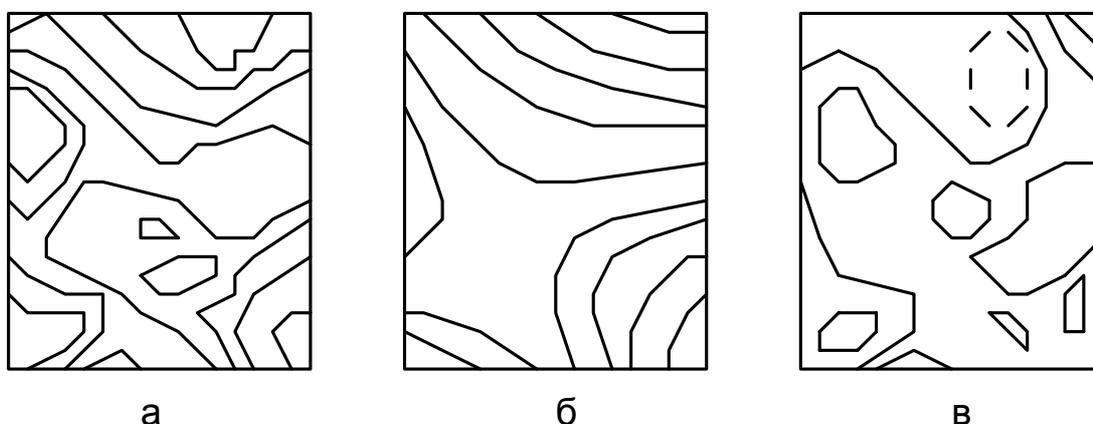


Рис. 22. Выделение локальных гравитационных аномалий от нефтегазоперспективных структур с помощью тренд-анализа: а) наблюдаемое поле; б) региональный фон; в) локальные аномалии.

Одной из разновидностей тренд-анализа является так называемый метод главных компонент. Он базируется на разложении наблюдаемого поля в сумму естественных ортогональных составляющих, ранжированных по убыванию дисперсии, создаваемой ими в исходном поле. Наиболее часто в качестве регионального фона используется первая главная компонента.

Представим наблюдаемое поле \mathbf{U} в виде прямоугольной матрицы, каждая из \mathbf{N} строк которой является набором значений поля на профиле, состоящем из \mathbf{n} пикетов, другими словами, каждое из значений поля будем рассматривать как элемент u_{ij} матрицы \mathbf{U} . Вычислим для всех возможных пар профилей ковариации

$$b_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{u}_{ik} \hat{u}_{jk}, \quad (13.3)$$

где

$$\hat{u}_{ik} = u_{ik} - \bar{u}_{ik} = u_{ik} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_{ik}, \quad (13.4)$$

и составим из них квадратную ковариационную матрицу **B** **N**-го порядка. Далее найдем максимальное собственное значение λ_{\max} этой матрицы из уравнения

$$|B - \lambda_{\max} E| = 0, \quad (13.5)$$

где **E** - единичная матрица, а также соответствующий этому значению собственный вектор ковариационной матрицы $\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1N})$, для чего решим систему линейных алгебраических уравнений

$$(B - \lambda_{\max} E)\vec{a}_1 = 0. \quad (13.6)$$

Чтобы исходные данные не изменяли своего масштаба, этот вектор нормируется из условия

$$\sum_{i=1}^N a_{1i}^2 = 1. \quad (13.7)$$

Для получения первой главной компоненты Y_1 вектор \vec{a}_1 умножается слева на исходную матрицу поля: $Y_1 = \vec{a}_1 U$, что дает требуемые весовые коэффициенты. В итоге элементы матрицы регионального фона вычисляются как произведение вектора-столбца Y_1 на вектор-строку \vec{a}_1 , причем к каждому элементу образующейся матрицы прибавляется среднее значение поля по профилю. После вычитания этого фона из наблюденного поля получаются остаточные аномалии, к которым этот алгоритм можно применить повторно и т.д., получая тренды более высоких порядков. Более подробно метод главных компонент изучается в курсе "Теоретические основы обработки геофизической информации".

§ 14. ИСТОКООБРАЗНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПРИ РАЗДЕЛЕНИИ ПОЛЕЙ

Рассмотренные ранее способы разделения гравитационных и магнитных аномалий за исключением геологического редуцирования пригодны, когда рельеф дневной поверхности представляет собой, строго говоря, горизонтальную плоскость. Пренебрежение неровностями рельефа зачастую может приводить к ошибкам в истолковании разделенных полей, поэтому интерпретатору требуются такие способы, которые учитывают реальный неровный рельеф. Большинство этих способов базируется на аппроксимации наблюденного поля полем некоторых формальных источников, таких как точечные и линейные массы, диполи, пластинки и т.п. Здесь также существует довольно много разнообразных подходов.

Одной из самых мощных и универсальных можно назвать методику, разработанную под руководством А.В.Цирульского [33], в соответствии с которой интерпре-

тацию проводят в два этапа. На первом этапе наблюдаемое поле аппроксимируется полем нескольких формальных источников (в двумерном случае обычно используют пластинки, а в трехмерном - стержни), что сводится к решению нелинейной задачи подбора их геометрических параметров и физических свойств. Чтобы получить соответствующее квазирешение, вначале проводят подбор наблюдаемого поля полем одного источника. Если точность подбора недостаточна, его повторяют с двумя источниками и т.д. На втором этапе осуществляется интерпретация полученных результатов. При этом одни из формальных источников считаются создающими региональный фон, а другие - локальные аномалии. Поскольку параметры эквивалентных источников определены, можно непосредственно вычислить значения фона и локальных аномалий в точках наблюдения, решая прямую задачу для этих источников. Не составляет проблемы и вычисление поля этих источников на некоторой горизонтальной плоскости, расположенной над ними, тем самым осуществляется редуцирование наблюдаемого поля на плоскость.

Данный подход наиболее эффективен, когда задача разделения полей решается совместно с задачей их детального количественного описания. Геологическое истолкование результатов подбора основано на возможности построения эквивалентных семейств замкнутых тел или контактных поверхностей, создающих такое же поле, как одна или несколько пластинок [33]. С помощью этой процедуры интерпретатор может достаточно быстро построить множество геологически содержательных моделей, создающих точно такое же поле, как и подобранные формальные источники. Априорная информация позволяет выбрать из этого множества удовлетворяющую ей модель, что и решает задачу интерпретации.

В описанном подходе аппроксимация поля сводится к решению достаточно трудоемкой нелинейной задачи подбора. Вместе с тем, аппроксимацию можно осуществлять и на основе решения линейной задачи подбора. Для этого достаточно задать геометрические параметры формальных источников, то есть фиксировать их положение в пространстве, и определять лишь физические свойства источников так, чтобы сумма их полей оказалась практически совпадающей с наблюдаемым полем. Подобранное на дневной поверхности поле, очевидно, как сумма гармонических функций само является гармонической функцией во всем верхнем полупространстве. Следовательно, всюду выше поверхности наблюдений любой элемент данного поля может быть вычислен путем решения соответствующей прямой задачи для набора аппроксимирующих формальных источников. Эта идея легла в основу многих способов разделения потенциальных полей.

Наиболее распространена аппроксимация наблюдаемой аномалии полем простого или двойного слоя, расположенного на некоторой глубине под дневной поверхностью. В некоторых случаях эффективнее оказывается аппроксимация нескольки-

ми слоями на разных глубинах. Для практических вычислений в гравirazведке простой слой часто заменяется набором точечных масс (в двумерном случае - линейных масс), а в магниторазведке вместо двойного слоя используется набор диполей (в двумерном случае - линейных диполей). Определение массы или магнитного момента каждого из формальных источников может осуществляться разными способами, но в результате все они сводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Самым простым, но достаточно эффективным является способ определения физических параметров формальных источников, предложенный В.И.Ароновым и сводящийся к применению метода последовательных приближений [4,5]. В соответствии с ним n -мерный вектор искомых параметров \mathbf{p} определяется путем решения следующей системы:

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{u}, \quad (14.1)$$

где \mathbf{u} - m -мерный вектор исходного поля, а матрица \mathbf{A} составлена из полей каждого формального источника в каждой точке наблюдения. Для решения системы (14.1) применяется следующая итерационная схема:

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{p}^{(k)} + \mathbf{u}, \quad (14.2)$$

где

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{p}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}^{(k)}, \quad (14.3)$$

$$\boldsymbol{\delta}^{(k)} = \mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{p}^{(k)}, \quad (14.4)$$

а \mathbf{E} - единичная матрица. Многолетний опыт расчетов по этой схеме показал, что итерационный процесс сходится достаточно быстро.

На рис. 23 показан взятый из книги [5] пример применения данного способа для пересчета аномалии силы тяжести, измеренной на неровном рельефе, в аномалию ее вертикального градиента на выбранной плоскости относимости. Исходная аномалия была обнаружена в Закавказье над неглубоко залегающим рудным телом. Для его локализации требовался вертикальный градиент, но попытка его расчета с помощью стандартной трансформации оказалась неудачной из-за разновысотности пунктов наблюдений и привела к результатам, изображенным на рис. 23. Аппроксимационный способ оказался значительно более эффективным. Полученная с его помощью аномалия вертикального градиента не содержит интенсивных помех и допускает дальнейшее детальное количественное описание.

Определение физических параметров формальных источников методом квази-решений - нецелесообразно из-за большой размерности получающейся системы и сильной корреляции между параметрами. Если приведенный итерационный алгоритм не устраивает интерпретатора, приходится прибегать к методу регуляризации, причем в качестве стабилизатора оказывается достаточно взять квадрат евклидовой

нормы искомого вектора \mathbf{p} . Это приводит к следующей безусловно-экстремальной задаче:

$$\|A\mathbf{p} - \mathbf{u}_\delta\|_{\mathbb{R}^m}^2 + \alpha \|\mathbf{p}\|_{\mathbb{R}^n}^2 = \min. \quad (14.5)$$

Фактически минимизация сводится к многократному решению системы линейных алгебраических уравнений и выбору оптимального из них по критерию невязки или по критерию Тихонова-Гласко.

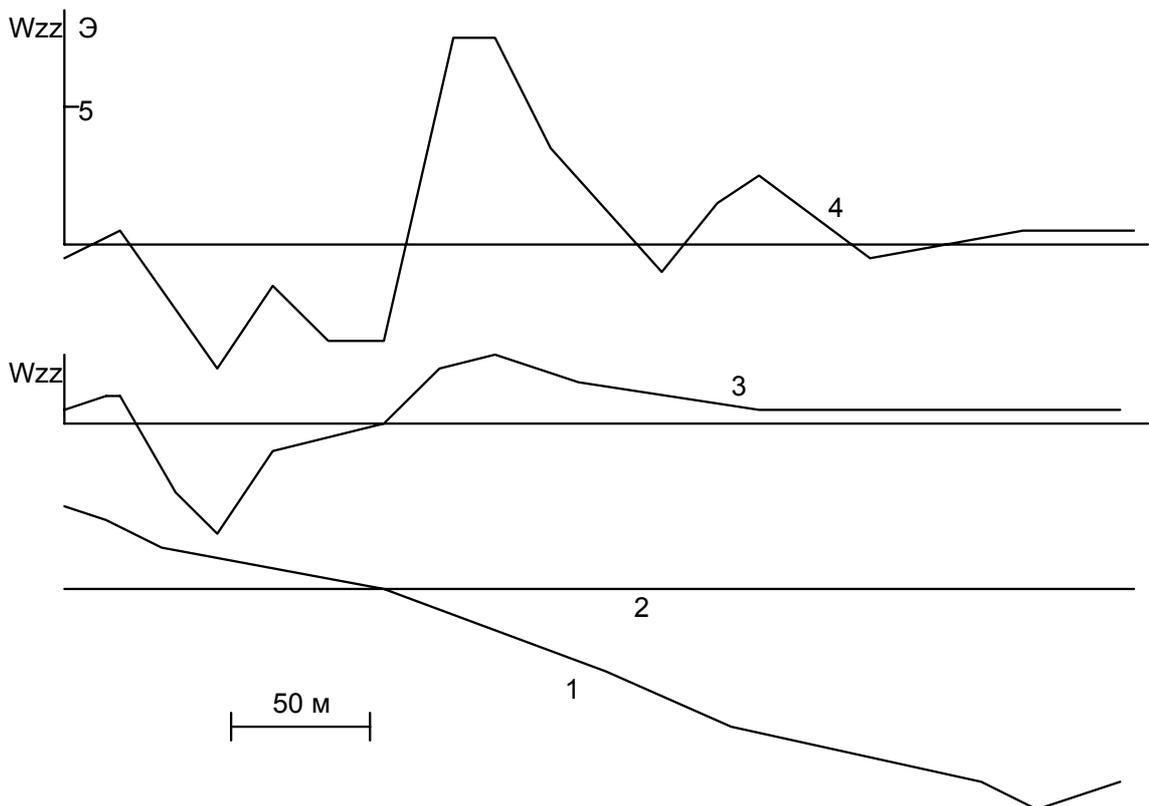


Рис. 23. Результаты расчетов вертикального градиента силы тяжести, измеренной на неровном рельефе (по В.И.Аронову): 1) поверхность наблюдений; 2) положение плоскости относимости; 3) аномалии вертикального градиента на плоскости относимости, вычисленные с учетом рельефа; 4) аномалии вертикального градиента на плоскости относимости, вычисленные без учета рельефа .

Построение эквивалентного простого или двойного слоя может осуществляться не только на горизонтальной поверхности, но и на замкнутых телах: таких как многогранники в трехмерном случае и многоугольные цилиндры - в двумерном. Эта идея, восходящая к работам А.Пуанкаре по выметанию масс, лежит в основе методики разделения гравитационных и магнитных аномалий, разработанной под руководством А.А.Непомнящих [24].

Как известно, поле точечной массы совпадает с полем однородного простого слоя сферической формы, причем центр этой сферы находится в точке расположения массы. Очевидно, таких теоретически эквивалентных слоев можно построить бесконечно много. Данный факт можно трактовать следующим образом: эквивалентный простой слой можно рассматривать как результат выметания точечной массы на сферу с сохранением ее внешнего поля. Подобное выметание точечной массы можно осуществлять на любую охватывающую ее замкнутую поверхность. Следовательно, массу любого конечного гравитирующего объекта можно выместить на произвольную полностью охватывающую его замкнутую поверхность, причем поле вне этой поверхности останется неизменным. В двумерном случае определение плотности эквивалентного простого слоя поверхностных масс $\sigma_{\text{пов}}$ в каждой его точке по наблюдаемому гравитационному полю сводится к решению следующего интегрального уравнения:

$$g(x_j, z_j) = -2f \oint_L \sigma_{\text{пов}}(x_i, z_i) \frac{z_j - z_i}{(x_j - x_i)^2 + (z_j - z_i)^2} dl. \quad (14.6)$$

Зная плотность эквивалентного простого слоя, можно вычислять любые производные гравитационного поля во внешнем по отношению к нему пространстве. Тем самым решается задача изучения пространственного распределения поля вокруг изучаемого единичного объекта.

Если наблюдаемое поле представляет собой сумму аномалий от нескольких изолированных объектов, данный подход позволяет провести разделение и получить пространственное распределение поля вокруг них. Для этого вначале каждый из объектов на базе априорной информации о них должен быть охвачен своим контуром (в трехмерном случае - поверхностью). Далее задаваемые контуры разбивают на малые отрезки, в пределах каждого из которых плотность $\sigma_{\text{пов}}$ считают постоянной. Тем самым построение простых слоев сводится к решению линейной задачи подбора. Использование метода регуляризации позволяет найти устойчивое решение данной задачи, для чего применяют стабилизатор, минимизирующий отклонение $\sigma_{\text{пов}}$ каждого из отрезков от среднего в каждом из заданных контуров. В процессе решения определяется и постоянный региональный фон, что не выводит исходной задачи из линейных. Фактически проводится многократное решение системы линейных алгебраических уравнений и отбор оптимального из них по критерию невязки или по критерию Тихонова-Гласко.

А.А.Непомнящих доказал, что, если контуры выметания действительно охватывают каждый из объектов, описанный процесс однозначно разделяет поля от них. Для проверки правильности задания контуров рекомендуется повторить разделение с немного измененными контурами. Если они не отсекают части соседних тел, раз-

деленные поля практически не изменятся. Изменение компонент может свидетельствовать о неверном исходном задании и о необходимости корректировки контуров. Аналогичная методика разделения может применяться и для магнитных аномалий, только при этом строят не простые, а двойные слои [24].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами рассмотрены основные подходы к решению задач обнаружения и разделения гравитационных и магнитных аномалий. Читатель мог убедиться, что несмотря на разнообразие идей, лежащих в основе этих методов, подавляющее большинство из них в итоге сводится к аппроксимации всего наблюдаемого поля или некоторой его части на всем изучаемом участке либо в скользящем окне. В качестве аппроксимирующих элементов применяются истокообразные функции, описывающие поля некоторых физико-геологических моделей, а также алгебраические и тригонометрические полиномы. Параметры аппроксимирующих конструкций определяются путем решения безусловн-экстремальных и условно-экстремальных задач, исходя из выбранного критерия оптимальности.

Задачи обнаружения и локализации объектов возникают на ранних этапах интерпретации. Для их успешного решения интерпретатор должен полностью владеть всей имеющейся априорной геолого-геофизической информацией. Тогда в зависимости от ее характера и объема он сможет выбрать наиболее подходящие способы из тех, которые рассмотрены в настоящем пособии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексидзе М.А. Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиметрии. М: Наука.1987. 336 с.
2. Алексидзе М.А., Гелашвили М.С., Картвелишвили К.М. Исследование некоторых вопросов трансформации потенциальных полей. Тбилиси: АН ГССР. 1972. 284 с.
3. Антонов Ю.В. Разделение сложных аномалий силы тяжести. Воронеж: ВГУ. 1985. 212 с.
4. Аронов В.И. Обработка на ЭВМ значений аномалий силы тяжести при произвольном рельефе поверхности наблюдений. М: Недра. 1976. 131 с.
5. Аронов В.И. Методы построения карт геолого-геофизических признаков и геометризация залежей нефти и газа на ЭВМ. М: Недра. 1990. 301 с.
6. Баранов В. Потенциальные поля и их трансформации в прикладной геофизике. М: Недра. 1980. 151 с.

7. Блох Ю.И. Количественная интерпретация гравитационных аномалий. М: МГРИ. 1982. 92 с.
8. Блох Ю.И. Решение прямых задач гравиразведки и магниторазведки. М: МГГА. 1993. 79 с.
9. Вычислительная математика и техника в разведочной геофизике. Справочник геофизика. М: Недра. 1990. 498 с.
10. Гладкий К.В. Гравиразведка и магниторазведка. М: Недра. 1967. 319 с.
11. Гольдшмидт В.И. Региональные геофизические исследования и методика их количественного анализа. М: Недра. 1979. 219 с.
12. Гольцман Ф.М., Калинина Т.Б. Статистическая интерпретация магнитных и гравитационных аномалий. Л: Недра. 1983. 248 с.
13. Гравиразведка. Справочник геофизика. М: Недра. 1990. 607 с.
14. Демидова М.А., Каламбаров Л.В. Использование преобразований гравитационного поля для изучения нефтегазоносных районов. М: Недра. 1978. 215 с.
15. Дополнительные главы курса гравиразведки и магниторазведки. Новосибирск: НГУ. 1966.
16. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М: Наука. 1978. 205 с.
17. Каратаев Г.И. Корреляционная схема геологической интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Новосибирск: Наука. 1966. 135 с.
18. Кобрунов А.И. Теория интерпретации данных гравиметрии для сложнопостроенных сред. Киев: УМК ВО. 1989. 100 с.
19. Колюбакин В.В., Лапина М.И. Обзор способов решения прямой и обратной задач магнитной разведки. Труды ИФЗ АН СССР. 1960. № 13 (180). 362 с.
20. Любимов Г.А., Любимов А.А. Методика гравимагнитных исследований с использованием ЭВМ. М: Недра. 1988. 303 с.
21. Магниторазведка. Справочник геофизика. М: Недра. 1990. 470 с.
22. Маловичко А.К., Костицын В.И., Тарунина О.Л. Детальная гравиразведка на нефть и газ. М: Недра. 1989. 224 с.
23. Маловичко А.К., Тарунина О.Л. Высшие производные гравитационного потенциала и их применение при геологической интерпретации аномалий. М: Недра. 1972. 151 с.
24. Непомнящих А.А., Овчаренко А.В., Ли В.С., Соколов Л.В. Интерпретация гравитационных аномалий на основе пространственного изучения и разделения полей. Алма-Ата: Каз ПТИ. 1978. 86 с.
25. Никитин А.А. Теоретические основы обработки геофизической информации. М: Недра. 1986. 342 с.

26. Серкеров С.А. Спектральный анализ в гравirazведке и магниторазведке. М: Недра. 1991. 279 с.
27. Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. Киев: Наукова думка. 1978. 228 с.
28. Страхов В.Н. Основные идеи и методы извлечения информации из данных гравитационных и магнитных наблюдений // Теория и методика интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. М: ИФЗ АН СССР. 1979. с.146-269.
29. Тарунина О.Л. Структурно-картировочные возможности гравirazведки в комплексе геолого-геофизических исследований. Пермь: ПГУ. 1993. 200 с.
30. Тафеев Г.П., Соколов К.П. Геологическая интерпретация магнитных аномалий. Л: Недра. 1981. 327 с.
31. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М: Наука. 1986. 288 с.
32. Тяпкин К.Ф., Кивелюк Т.Т. Изучение разломных структур геолого-геофизическими методами. М: Недра. 1982. 239 с.
33. Цирульский А.В. Функции комплексного переменного в теории и методах потенциальных геофизических полей. Свердловск: УрО АН СССР. 1990. 132 с.
34. Шрайбман В.И., Жданов М.С., Витвицкий О.В. Корреляционные методы преобразования и интерпретации геофизических аномалий. М: Недра. 1977. 237 с.
35. Яновская Т.Б., Порохова Л.Н. Обратные задачи геофизики. Л: ЛГУ. 1983. 212 с.

О Г Л А В Л Е Н И Е

	стр.
Введение	3
Глава 1. Обратные задачи гравиразведки и магниторазведки	4
§ 1. Основные задачи интерпретации гравитационных и магнитных аномалий	4
§ 2. Обратные задачи и их свойства	5
§ 3. Квазирешение обратной задачи	13
§ 4. Основы метода регуляризации	17
Глава 2. Геологически содержательные способы обнаружения и разделения аномалий	22
§ 5. Основные подходы к обнаружению аномалий	22
§ 6. Теоретические основы разделения аномалий	28
§ 7. Геологическое редуцирование аномалий	33
§ 8. Корреляционные способы разделения аномалий.	35
Глава 3. Трансформации гравитационного и магнитного полей	37
§ 9. Применение основных типов трансформаций.	37
§ 10. Теоретические трансформации и их частотный анализ.	51
§ 11. Вычислительные схемы трансформаций.	59
Глава 4. Аппроксимационные способы разделения аномалий.	66
§ 12. Интерполяция и экстраполяция в разделении полей	66
§ 13. Разделение аномалий с помощью тренд-анализа	71
§ 14. Истокообразная аппроксимация при разделении полей	73
Заключение.	78
Литература.	78