

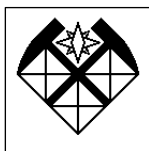
Л.М.АЛЬПИН, Д.С.ДАЕВ, А.Д.КАРИНСКИЙ

Л.М.АЛЬПИН, Д.С.ДАЕВ, А.Д.КАРИНСКИЙ

ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В РАЗВЕДОЧНОЙ ГЕОФИЗИКЕ

ВЫСШЕЕ
ОБРАЗОВАНИЕ

Часть III.
Глава четвёртая.
*Стационарное
электрическое поле.*
Глава пятая.
*Магнитное поле
постоянного тока*



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Серго Орджоникидзе
(МГРИ)



Л. М. АЛЬПИН, Д. С. ДАЕВ, А. Д. КАРИНСКИЙ

ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В РАЗВЕДОЧНОЙ ГЕОФИЗИКЕ

Было допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся по специальности «Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых»

Часть III.

Глава четвёртая. Стационарное электрическое поле.

Глава пятая. Магнитное поле постоянного тока.

УДК 550.83.01(0.75)

Альпин Л. М., **Даев Д. С., Каринский А. Д.** Теория полей,
применяемых в разведочной геофизике.

Учебник для вузов. – М.: Недра, 1985. – 407 с.

Изложена теория полей: гравитационного; электростатического и магнитостатического в вакууме и в поляризующейся (намагничивающейся) среде; стационарных электрического и магнитного; переменного электромагнитного; рассмотрены элементы теории упругости; распространение электромагнитных и упругих колебаний в среде; способы расчёта полей и их зависимости от среды.

Для студентов геофизических специальностей геологоразведочных вузов и факультетов.

Рецензенты:

1. Кафедра геофизики МГУ.
2. Д-р техн. наук *Б. С. Светов (ИЗМИРАН)*.

Учебник "Теория полей, применяемых в разведочной геофизике", отражавший, в то время, взгляды научной школы геофизического факультета МГРИ, был выпущен издательством "Недра" в 1985 году.

По мнению одного из авторов подготовка в настоящее время электронной версии Учебника даёт возможность дополнить книгу несколькими важными, особенно для студентов, разделами и значительно увеличить число иллюстраций. Есть надежда, что удастся подготовить в виде отдельных pdf – файлов следующие пять частей электронной версии Учебника. Часть I: "Введение. Поле"; часть II: "Статические поля в вакууме и в присутствии среды"; часть III: "Стационарные электрическое и магнитное поля"; часть IV: "Переменное электромагнитное поле"; часть V: "Элементы теории упругости и теории распространения упругих колебаний".

В этом разделе электронной версии Учебника представлена

часть III.

Глава четвёртая. Стационарное электрическое поле.

Глава пятая. Магнитное поле постоянного тока.

2020,. 106 с.

Иллюстраций 33, список литературы – 27 названий.

http-адрес **части I:**

http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol1_2019.pdf.

В части I – разделы: "Предисловие", "Введение", глава первая "Поле".

http-адрес **части II:**

http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol2_2019.pdf.

В части II – разделы: глава вторая "Статическое поле в вакууме", глава третья "Статическое поле в присутствии среды".

Электронная версия части III Учебника подготовлена А. Д. Каринским

Москва, 2020 г.

© Каринский А. Д., 2020

Оглавление

Список обозначений к главам четвёртой, пятой	4
Глава четвёртая. Стационарное электрическое поле.....	7
§ 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК	7
I. Упорядоченное движение микрочарядов	8
II. Поток I_S вектора j , цепь тока, ток I	9
III. Уравнение непрерывности	11
IV. Необъёмные токи	12
V. Дифференциальная форма закона Ома	15
VI. Тензор удельной электропроводности.....	16
§ 2. ПОСТОЯННЫЙ ТОК.....	18
I. Уравнение непрерывности постоянного тока	19
II. Поле E и его потенциал U	21
III. Сопротивление участка цепи тока.....	21
IV. Коэффициент участка цепи тока	25
§ 3. СТОРОННЕЕ ПОЛЕ. РАБОТА В ЦЕПИ ТОКА	26
I. Стороннее поле.....	27
II. Электродвижущая сила	28
III. Дополнение закона Ома.....	29
IV. Контактные э. д. с.....	30
V. Закон Джоуля – Ленца	31
§ 4. ИСТОЧНИКИ СТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ.....	33
I. Плотности источников поля E	34
II. Уравнения плотности источников поля E	36
III. Заряды на поверхности включения	38
§ 5. ВЛИЯНИЕ НАРУШЕНИЙ ОДНОРОДНОСТИ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ	40
I. Поверхность раздела.....	40
II. Граница проводящей среды.....	42
III. Идеальный проводник	44

IV. Тонкие слои.....	45
V. Влияние включения.....	47
§ 6. СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ЗЕМЛЕ.....	48
I. Цепь тока с питающими электродами	49
II. Эмиссия и заряд электрода	50
III. Поле в пространственной части цепи тока	51
IV. Взаимно независимые электроды. Уединённый электрод	53
V. Необъёмные электроды.....	57
§ 7. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ СТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ.....	58
I. Система уравнений	59
II. Условия единственности.....	59
III. Замечания	60
§ 8. ДОПОЛНЕНИЯ К ЧЕТВЁРТОЙ ГЛАВЕ	63
I. Нарушения однородности среды, не искажающие поля	63
II. Аналогия со статическим полем	65
III. Принцип взаимности питающих и измерительных электродов.....	66
IV. Сопротивление и ёмкость электрода.....	67
V. О влиянии диэлектрической проницаемости	67
VI. Об индуцированных зарядах в электрически анизотропной среде	68
VII. Об источниках стационарного электрического поля.....	70
Глава пятая. Магнитное поле постоянного тока.....	72
§ 1. ТОК В МАГНИТНОМ ПОЛЕ.....	72
I. Токовый контур в однородном магнитном поле	72
II. Магнитные моменты токов и магнитов.....	73
III. Дополнения к § 1	76
§ 2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА В ОТСУТСТВИИ МАГНИТНОЙ СРЕДЫ	76
I. Поле линейных, объёмных и поверхностных токов.....	77
II. Векторный потенциал	79
III. Система уравнений поля.....	82

§ 3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ОТСУТСТВИИ МАГНИТНОЙ СРЕДЫ	83
I. Симметрия тока и его магнитного поля	84
II. Магнитное поле цепи тока с электродами	88
III. Скалярный потенциал магнитного поля постоянного тока	90
IV. Замечания	92
§ 4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ПРИСУТСТВИИ МАГНИТНОЙ СРЕДЫ	93
I. Влияние магнитной среды	94
II. Эквивалентные плотности молекулярных токов	95
III. Магнитный аналог вектора D	96
§ 5. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ПРИСУТСТВИИ МАГНИТНОЙ СРЕДЫ	97
I. Уравнения поля B , H	97
II. Уравнение связи	98
III. Уравнение векторного потенциала	99
IV. Решение уравнения вектора A	99
§ 6. ПОЛЕ В ОДНОРОДНОЙ МАГНИТНОЙ СРЕДЕ	100
I. Поле в неограниченной однородной среде	101
II. Нарушения однородности среды, не искажающие поля	101
III. Взаимодействие токов	102
IV. Замечания	103
Список литературы	105

Список обозначений к главам четвёртой, пятой

- $\mathbf{1}_l, \mathbf{1}_x, \mathbf{1}_1, \mathbf{1}_\phi, \dots$ - безразмерные единичные векторы (орты) по направлениям l, X, l_1, l_ϕ, \dots ;
- a - точка наблюдения;
- \mathbf{A} - векторный потенциал магнитного поля \mathbf{B} ;
- \mathbf{B} - вектор магнитной индукции с абсолютной величиной B ;
- $de = \delta \cdot dV, \sigma \cdot dS, \lambda \cdot dl$ - бесконечно-малый электрический заряд;
- dI - электрический ток через площадку dS ;

- dI_S - поток вектора \mathbf{j} через (ориентированную) площадку dS ;
 dl - бесконечно-малый отрезок линии l ;
 $d\mathbf{l} = \mathbf{1}_l \cdot dl$ - ориентированный элементарный отрезок длиной dl ;
 dS - бесконечно-малая площадка или элемент поверхности S ;
 $d\mathbf{S} = \mathbf{1}_n \cdot dS$ - ориентированная элементарная площадка с нормалью n и с площадью dS ;
 dV - бесконечно малый объём или элемент области V пространства;
 $d\omega$ - бесконечно малый угол видимости ориентированной площадки dS ;
 \mathbf{D} - вектор электрического смещения (индукции) с абсолютной величиной D ;
 e - электрический заряд;
 $e_{\text{плн}}, e_{\text{свб}}, e_{\text{свз}}$ - полный, свободный, связанный электрические заряды;
 \mathbf{E} - напряжённость электрического поля с абсолютной величиной E ;
 \mathcal{E} - напряжение векторного поля;
 B_l, E_x, j_1, \dots - скалярные компоненты векторов $\mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{j}, \dots$ по направлениям l, X, l_1, \dots ;
 $\mathbf{B}_l = \mathbf{1}_l \cdot B_l, \mathbf{E}_x = \mathbf{1}_x \cdot E_x, \mathbf{j}_1 = \mathbf{1}_1 \cdot j_1, \dots$ - векторные компоненты векторов $\mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{j}, \dots$ по направлениям l, X, l_1, \dots ;
 G - (электрическая) проводимость;
 \mathbf{i} - вектор поверхностной плотности тока с абсолютной величиной i ;
 I - электрический ток;
 I_S - поток вектора \mathbf{j} через (ориентированную) поверхность S ;
 $I_{\mathcal{A}}, I_A, I_B$ - эмиссии электродов \mathcal{A}, A, B ;
 h - высота, толщина;
 \mathbf{H} - напряжённость магнитного поля с абсолютной величиной H ;
 \mathbf{j} - вектор плотности электрического тока с абсолютной величиной j ;
 \mathbf{J} - вектор намагничённости с абсолютной величиной J ;
 $\mathbf{J}^{\text{вр}}$ и \mathbf{J}^0 - векторы временной (индуктивной) и постоянной (остаточной) намагничённости;
 l - линия, длина;
 l_E, l_j, l_B, l_H - векторные линии полей $\mathbf{E}, \mathbf{j}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$;
 $l[S]$ - замкнутая линия (контур), ограничивающая поверхность S ;
 $\mathbf{L}, \mathbf{L}_{12}, \mathbf{L}_{qa}$ - радиус-векторы с равными расстояниям абсолютными величинами L, L_{12}, L_{qa} ;
 \mathbf{M} - момент с абсолютной величиной M ; $\mathbf{M}_{\text{вр}}$ - вращающий момент;
 n - нормаль к поверхности S ;
 $\mathbf{n} = \mathbf{1}_n$ - безразмерный единичный вектор по направлению нормали n ;
 \mathbf{n}_l - безразмерный единичный вектор по направлению нормали n_l к поверхности S , ограниченной контуром $l[S]$ линейного тока I ;
 o - точка, центр;
 p - точка на поверхности S ;
 \mathbf{p} - момент диполя с абсолютной величиной p ;
 q - точка, в частности, в источнике (возбудителе) поля;
 r - цилиндрическая координата;

R - (электрическое) сопротивление, сферическая координата;
 S - поверхность;
 $S[V]$ - замкнутая поверхность, ограничивающая область пространства V ;
 S_j - поверхности, ортогональные векторным линиям l_j ;
 $S^{\tilde{\gamma}}$ - продольная проводимость слоя;
 t - время, тангенциальное (касательное к поверхности) направление;
 $\mathbf{t} = \mathbf{1}_t$ - безразмерный единичный вектор по направлению t ;
 T^p - поперечное сопротивление слоя;
 U - (скалярный) потенциал;
 V - область пространства, объём;
 x, y, z - декартовы координаты (или координата z цилиндрической системы);
 X, Y, Z - оси координат;
 γ (гамма)- удельная электропроводность;
 $\hat{\gamma}$ - тензор удельной электропроводности;
 δ (дельта)- объёмная плотность зарядов;
 $\delta_{\text{плн}}, \delta_{\text{свб}}, \delta_{\text{свз}}$ - объёмные плотности полных, свободных, связанных зарядов;
 $\delta_{\text{вр}}, \delta^0$ - объёмные плотности временных и постоянных магнитных масс;
 $1 + \chi = \epsilon$ (эпсилон)- диэлектрическая проницаемость;
 $\epsilon_0 \approx 10^{-9} / (36 \cdot \pi)$, $\text{Ф/м} \approx 8.8542 \cdot 10^{-12}$, Ф/м - электрическая постоянная;
 $\epsilon \cdot \epsilon_0 = \epsilon_a$ - абсолютная диэлектрическая проницаемость;
 η, η_{12} (эта)- поверхностная плотность дипольных моментов;
 θ (тета)- сферическая координата;
 Θ (тета прописная)- область пространства;
 \varkappa (каппа)- магнитная восприимчивость;
 λ (лямбда)- линейная плотность зарядов;
 $\lambda_{\text{плн}}, \lambda_{\text{свб}}, \lambda_{\text{свз}}$ - линейные плотности полных, свободных, связанных зарядов;
 $1 + \varkappa = \mu$ (мю)- магнитная проницаемость;
 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, Гн/м - магнитная постоянная;
 $\mu \cdot \mu_0 = \mu_a$ - абсолютная магнитная проницаемость;
 π (пи) $\approx 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751\dots$;
 ρ (ро)- удельное электрическое сопротивление;
 σ (сигма)- поверхностная плотность зарядов;
 $\sigma_{\text{плн}}, \sigma_{\text{свб}}, \sigma_{\text{свз}}$ - поверхностные плотности полных, свободных, связанных зарядов;
 $\sigma_{\text{вр}}$ и σ^0 - поверхностные плотности временных и постоянных магнитных масс;
 τ (тау)- тангенциальное (касательное к поверхности) направление,
 в индексах - полная тангенциальная компонента вектора;
 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{1}_\tau$ - безразмерный единичный вектор по направлению τ ;
 φ (фи)- цилиндрическая или сферическая (азимутальная) координата;
 ω (омега)- угол видимости;
 Ω (омега прописная)- телесный угол;
 Π - плоскость;

Глава четвёртая. Стационарное электрическое поле

§ 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Поток электричества – электрический ток – характеризует вектор \mathbf{j} , который называют *плотностью тока*. Этот вектор в какой-либо точке a определяется направлением движения электричества и количеством электричества de , проходящего за элемент времени dt через площадку dS_H с центром в точке a , нормальную к направлению движения:

$$\mathbf{j} = \mathbf{1}_w \cdot \frac{de}{dS_H \cdot dt}, \quad (4.1)$$

где $\mathbf{1}_w = \mathbf{w}/w$ – единичный вектор по направлению движения электричества; \mathbf{w} – скорость этого движения.

Согласно (4.1) при $de > 0$ направление вектора \mathbf{j} совпадает с направлением движения электричества (рис. 4.1, а), а при $de < 0$ вектор \mathbf{j} имеет направление, противоположное направлению движения электричества.

В общем случае можем иметь движение электричества обоих знаков по разным (например, взаимно противоположным) направлениям и вектор

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^+ + \mathbf{j}^-, \quad (4.1')$$

где \mathbf{j}^+ и \mathbf{j}^- – плотности токов, образуемых движением положительного и отрицательного электричества, определяемые по формуле (4.1). Вектор \mathbf{j}^+ параллелен вектору \mathbf{w}^+ , а вектор \mathbf{j}^- антипараллелен вектору \mathbf{w}^- (рис. 4.1, б).

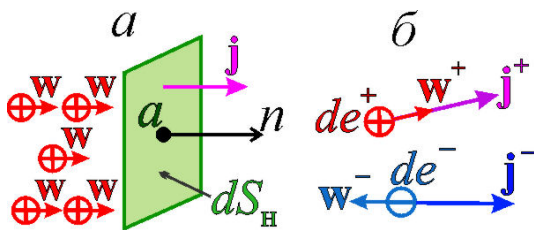


Рис. 4.1.

Вектор \mathbf{j} плотности тока

Если движение отрицательного электричества заменить таким же, но противоположного направления движением положительного электричества, то это не повлияет на показания приборов (гальванометров), с помощью которых обычно обнаруживают существование тока и определяют его

направление.

В соответствии с этим вектор \mathbf{j} , определяемый по формуле (4.1), не меняется при подстановке в эту формулу $-de$ и $-\mathbf{w}$ вместо de и \mathbf{w} .

Сводя с помощью такой замены движение любых зарядов к движению одних только положительных зарядов, можно сказать, что направление вектора \mathbf{j} совпадает с направлением движения электричества, а абсолютная величина j этого вектора есть отнесённое к единицам времени и площади количество электричества, проходящего за время dt через площадку dS_H , нормальную к направлению движения (рис. 4.1, а).

Эта глава посвящена постоянному полю; в ней будем рассматривать постоянный ток, т. е. поле вектора $\mathbf{j} = \mathbf{j}(a)$, зависящего от положения точки a , но не от времени t . Но в этом параграфе будем иметь в виду более общий случай, когда плотность тока может зависеть также от времени, т. е. когда $\mathbf{j} = \mathbf{j}(a, t)$. Пренебрегая изменениями направления и абсолютной величины вектора \mathbf{j} за

единицу времени в пределах единичной площадки, можно сказать, что абсолютная величина вектора \mathbf{j} численно равна количеству электричества, проходящего в единицу времени через единичную площадку, нормальную к направлению движения электричества.

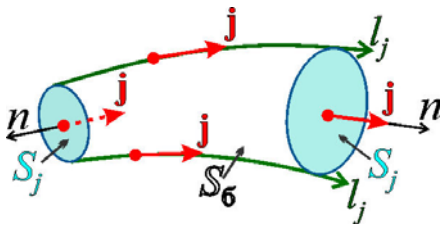


Рис. 4.2.

Токковые линии l_j и токовая трубка, ограниченная токовой поверхностью S_0

Векторные линии l_j , поверхности и трубки (рис. 4.2) поля \mathbf{j} называют *токовыми*. Электрические заряды движутся по токовым линиям. На токовых поверхностях S_0 нормальная компонента вектора \mathbf{j} равна нулю.

I. Упорядоченное движение микрочарядов

Весьма сложное, хаотическое движение свободных микрочарядов может сочетаться с упорядоченным результирующим движением, которое сводится к общему их дрейфу в некотором направлении и образует ток в этом или противоположном (в случае отрицательных микрочарядов) направлении.

Движение микрочарядов в горной породе осложняется неоднородностью её состава, так как даже однородная в масштабе геофизических измерений порода обычно в масштабе движений отдельных микрочарядов является неоднородной, имеет сложное строение и состоит из компонентов, различных по природе электропроводности и по значениям удельной электропроводности. Но, схематизируя явление электрического тока, представим, что все микрочаряды каждого знака в окрестности точки наблюдения одинаковы и движутся с одной и той же скоростью. Заменяя микрочаряды каждого знака сплошным объёмным электричеством с плотностью, равной числу содержащихся в единице объёма микрочарядов, умноженному на величину отдельного микрочаряда, получаем потоки положительного и отрицательного электричества с плотностью свободных зарядов δ^+ и δ^- и со скоростями \mathbf{w}^+ и \mathbf{w}^- .

Пусть dS – площадка, нормальная к направлению l движения электричества одного какого-либо знака, а \mathbf{w} (\mathbf{w}^+ или \mathbf{w}^-) – скорость этого движения. Построим цилиндр с образующей по направлению l и с направляющей по контуру (границе) площадки dS (рис. 4.3). Допустим, что V_1 и V_2 – части цилиндра, разделяемые площадкой dS , а электричество движется из V_1 в V_2 . За промежуток времени dt через площадку dS пройдут те заряды, которые находятся в V_1 на расстояниях от площадки dS , меньших отрезка $w \cdot dt$, т. е. количество электричества $de = w \cdot \delta \cdot dS \cdot dt$, занимающее объём $w \cdot dS \cdot dt$. Следовательно, согласно (4.1) имеем ток с плотностью

$$\mathbf{j} = \mathbf{w} \cdot \delta. \quad (4.2)$$

При $\delta > 0$ вектор \mathbf{j} параллелен вектору \mathbf{w} , а при $\delta < 0$ – вектору $-\mathbf{w}$. В общем случае, имеем движение положительного и отрицательного электричества со скоростями \mathbf{w}^+ и \mathbf{w}^- и, следовательно, токи с плотностями

$$\mathbf{j}^+ = \mathbf{w}^+ \cdot \delta^+, \quad \mathbf{j}^- = -\mathbf{w}^- \cdot \delta^-, \quad \mathbf{j} = \mathbf{w}^+ \cdot \delta^+ - \mathbf{w}^- \cdot \delta^-, \quad (4.2')$$

где δ^+ – плотность положительного электричества; δ^- – абсолютная величина плотности отрицательного электричества; $\mathbf{j} = \mathbf{j}^+ + \mathbf{j}^-$ в соответствии с (4.1').

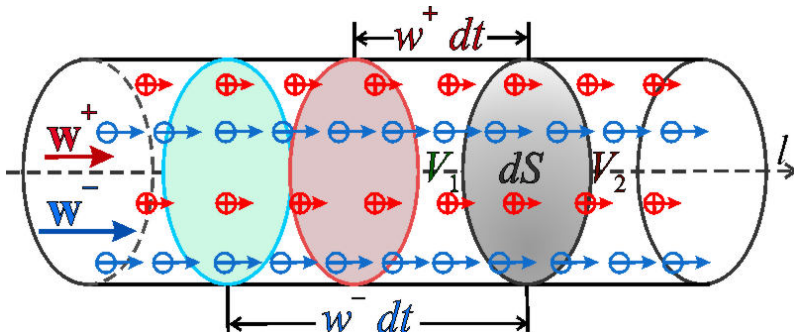


Рис. 4.3.

Отрезки токовой трубки, содержащие положительные и отрицательные микрочастицы, которые проходят за время dt через поперечное сечение трубки dS из области V_1 в область V_2 . Разностью этих зарядов, делённой на dt , определяется ток в трубке

отвечает, например, электрически нейтральному проводнику с ионной проводимостью. Тем более ясно, что существование тока не исключает постоянства плотности электричества δ и плотностей δ^+ и δ^- в отдельности.

Согласно (4.2'), для того чтобы вектор \mathbf{j} был отличен от нуля, достаточно неравенства $\mathbf{w}^+ \cdot \delta^+ \neq \mathbf{w}^- \cdot \delta^-$, которым, конечно, не определяются значения δ^+ и δ^- . Так, например, при $\mathbf{w}^+ = 0$ вектор $\mathbf{j} = -\mathbf{w}^- \cdot \delta^-$ и плотность тока вовсе не зависит от δ^+ (электронный проводник). В частности, не исключён случай, когда $\mathbf{j} \neq 0$, а $\delta^+ = \delta^-$ и, следовательно, согласно (2.4), $\delta = 0$. Это

II. Поток I_S вектора \mathbf{j} , цепь тока, ток I

Согласно определению вектора \mathbf{j} *п о т о к*

$$dI_S = (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}) = j \cdot dS \cdot \cos(\mathbf{j}, d\mathbf{S}) = j_n \cdot dS \quad (4.3)$$

этого *вектора* через ориентированную площадку dS есть, количество электричества (положительного), проходящего через неё в единицу времени, взятое со знаком плюс, если ток направлен от оборотной стороны площадки к её лицевой стороне, т. е. под острым (рис. 4.4, а) или нулевым углом к нормали n ,

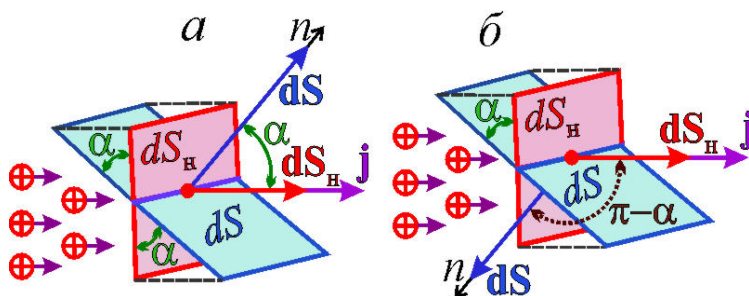


Рис. 4.4.

Поток dI_S и ток dI

и со знаком минус, если этот угол тупой (рис. 4.4, б) или равен π .

Не сложно доказать что абсолютная величина $|dI_S|$ потока dI_S вектора \mathbf{j} через ориентированную площадку

dS равна электрическому току dI через эту площадку. Действительно, $|dI_S| = j \cdot dS \cdot |\cos(\mathbf{j}, n)|$. Но $dS \cdot |\cos(\mathbf{j}, n)| = dS_H$ (см. рис. 4.4), т. е. $|dI_S| = j \cdot dS_H = dI$.

Аналогично определяется поток

$$I_S = \int_S (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}) = \int_S j_n dS \quad (4.3')$$

вектора \mathbf{j} через поверхность S . Потоки через отдельные её участки могут иметь различные знаки, а поток I_S через, всю поверхность S равен их алгебраической сумме. Через нормальную поверхность S_j поля \mathbf{j} (см. рис. 4.2), т. е. через поверхность, нормальную к токовым линиям l_j (с нормалью n по направлению \mathbf{j}), поток $I_S > 0$, а если величина j имеет одно и то же значение во всех точках этой поверхности, то

$$I_S = j \cdot S. \quad (4.3'')$$

Поток вектора \mathbf{j} через токовую поверхность S_σ (через поверхность токовой трубки) равен нулю.

Изображая поле вектора \mathbf{j} с помощью токовых линий l_j и представляя их проведенными с густотой, пропорциональной абсолютной величине j плотности тока, можно сказать, что величины $|I_S|$, $|dI_S|$ и j определяются числами токовых линий, пронизывающих поверхность S , площадку dS и единичную площадку, нормальную к направлению тока.

Цепью тока называют ряд последовательно соединённых проводников (звеньев, участков цепи), вдоль которого "пропускают" (проходит) ток. Электрическим током ("силой тока") I в проводнике (в цепи) называют абсолютную величину $|I_S|$ потока вектора \mathbf{j} через поперечное сечение проводника (цепи электрического тока). При этом обычно имеют в виду часто применяемые в технике проводники сильно удлинённой формы (провода) с поперечными сечениями, изменения которых в продольном направлении почти незаметны, причём предполагается, что ток через них пропускают в этом направлении и вектор \mathbf{j} в них всюду нормален к поперечному сечению. Такой проводник в отличие от пространственного проводника (произвольной формы) сравним с линейным проводником (см. раздел IV). В нём нормальное сечение тока вполне определяется точкой, через которую его проводят; оно совпадает с поперечным сечением S_j проводника, которое к тому же легко определяется (см. раздел III § 2).

"Силу" (величину) I любого тока можно определить как абсолютную величину потока вектора \mathbf{j} через сечение проводника поверхностью S . Но в общем случае (пространственного тока) это сечение, проведенное через какую-либо заданную точку проводника, может быть различным в зависимости от конфигурации токовых линий в нём и, следовательно, от разных обстоятельств, влияющих на распределение тока в проводнике. В частности, включая такой проводник по-разному в цепь, вдоль которой проходит ток, будем иметь различные расположения и формы поверхностей S .

Электрический ток ("сила тока") I – положительная величина. Ток I через поверхность S равен абсолютной величине определяемого в соответствии с (4.3') потока вектора \mathbf{j} через эту поверхность. Однако иногда удобно придавать значению тока I алгебраический смысл, пользуясь некоторым условным правилом знаков, например, в законе Кирхгофа (4.20).

III. Уравнение непрерывности

Поток вектора \mathbf{j} через замкнутую поверхность $S[V]$, ограничивающую область V , равен количеству электричества (положительного), растекающегося из области V в единицу времени, считая стекание электричества к этой области отрицательным растеканием из неё. Но изменение количества свободного электричества $e_{V_{\text{свб}}}$ в области V , согласно закону сохранения количества электричества, может происходить только вследствие перехода электричества через границу $S[V]$ области V . Следовательно, поток вектора \mathbf{j} через поверхность $S[V]$

$$\oint_{S[V]} (\mathbf{j} \, d\mathbf{S}) = -\frac{de_{V_{\text{свб}}}}{dt}, \quad (4.4)$$

где $de_{V_{\text{свб}}}/dt$ – производная по времени t от величины $e_{V_{\text{свб}}}$, т. е. скорость изменения со временем заряда $e_{V_{\text{свб}}}$, находящегося в области V . Этот поток положителен, если производная $de_{V_{\text{свб}}}/dt < 0$, т. е. если заряд $e_{V_{\text{свб}}}$ уменьшается (рис. 4.5, а), и отрицателен, если $de_{V_{\text{свб}}}/dt > 0$, т. е. если заряд $e_{V_{\text{свб}}}$

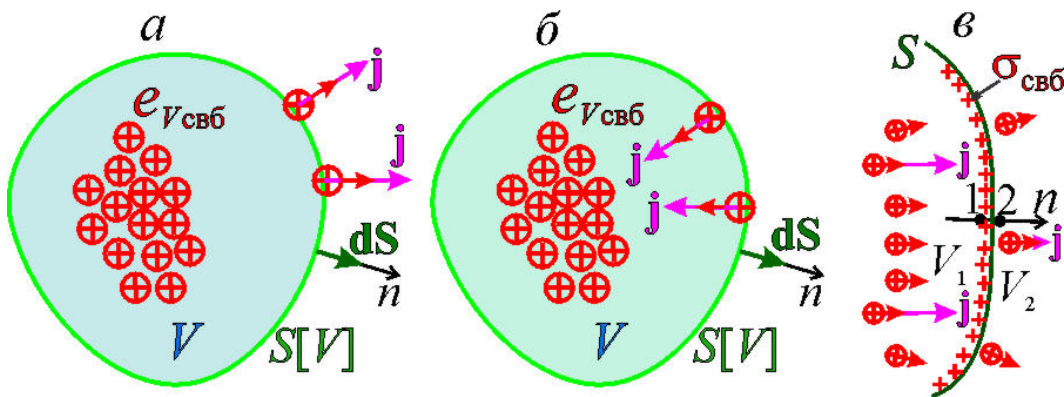


Рис. 4.5.

К интегральной форме (4.4) (а, б) и поверхностной форме (4.10) (в) уравнения непрерывности электрического тока

увеличивается (рис. 4.5, б).

В этой главе до § 4 всюду, кроме (4.21), имеются в виду свободные заряды, но индекс «свб» при e , δ , σ , λ будем иногда опускать. Предполагается (как во всей книге), что среда неподвижна и её свойства не зависят от времени. Исключение составляют формулы (5.9''), (5.9''').

Если в области V находится объёмный заряд с плотностью $\delta_{\text{свб}}$, то

$$e_{V_{\text{свб}}} = \int_V \delta_{\text{свб}} \, dV, \quad \text{и производная по времени } t \quad \frac{de_{V_{\text{свб}}}}{dt} = \int_V \frac{\partial \delta_{\text{свб}}}{\partial t} \, dV.$$

Поэтому, применяя теорему Гаусса – Остроградского (1.30) к левой части (4.4), имеем

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{j} \, dV = \int_V -\frac{\partial \delta_{\text{свб}}}{\partial t} \, dV. \quad (4.4')$$

Из равенства интегралов по (одной и той же) произвольной области V

следует равенство подинтегральных функций. Таким образом, получаем для поля вектора \mathbf{j} уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \delta_{\text{свб}}}{\partial t}. \quad (4.5)$$

Если из окрестности dV точки a растекается электричества (положительного) больше, чем к ней притекает, то в этой точке плотность $\delta_{\text{свб}}$ заряда уменьшается и производная $\partial \delta_{\text{свб}}/\partial t < 0$; в противном случае значение $\delta_{\text{свб}}$ увеличивается и $\partial \delta_{\text{свб}}/\partial t > 0$. Источники поля \mathbf{j} находятся там, где плотность свободных зарядов меняется во времени.

Равенство (4.4), являющееся выражением постулата сохранения количества электричества, называется уравнением непрерывности тока, а равенство (4.5) является дифференциальной формой этого уравнения. Согласно этому равенству там, где производная $\partial \delta_{\text{свб}}/\partial t$ не обращается в бесконечность, дивергенция вектора \mathbf{j} имеет смысл, и, следовательно, величина j по направлению тока не терпит разрыва.

IV. Необъёмные токи

В некоторых, случаях объёмные токи удобно ("мысленно") заменить необъёмными токами: линейными или поверхностными.

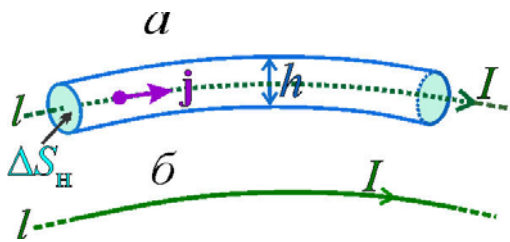


Рис. 4.6.

К линейному току I по линии l

При достаточно малых размерах поперечного сечения тока ΔS_n (рис. 4.6, а) нас часто интересуют только величина ("сила") I этого тока и линия l , определяющая его расположение в пространстве (средняя токовая линия), а не плотность j и поперечное сечение ΔS_n . В

таком случае, мысленно уменьшая поперечное сечение ΔS_n , заменяют объёмный ток линейным током по линии l с той же величиной I (рис. 4.6, б).

Считая, что во всех точках этого сечения плотность тока j имеет одно и то же значение и, следовательно, $I = j \cdot \Delta S_n$, получаем при $\Delta S_n \rightarrow 0$ плотность $j \rightarrow \infty$. Если поперечное сечение тока ΔS_n – квадрат со стороной h , то $I = j \cdot h^2$. Следовательно, в линейном токе (проводнике) объёмная плотность тока

$$j \rightarrow \infty \text{ как } 1/h^2 \text{ при } h \rightarrow 0. \quad (4.6)$$

Ток в очень тонком слое, параллельный поверхности (границам) этого слоя, часто заменяют током по некоторой поверхности S , например, по средней поверхности слоя, и таким образом получают поверхностный ток. Пусть h – толщина слоя; \mathbf{j}_τ – полная тангенциальная (вдоль средней поверхности слоя) компонента вектора \mathbf{j} в этом слое, l – линия на средней поверхности слоя, нормальная к вектору \mathbf{j}_τ , а S_l – поперечное сечение слоя, проходящее через линию l . Поверхность S_l представляет собой полоску с шириной h , а элементарный отрезок этой полоски – площадку $h \cdot dl = dS_l$, через которую:

проходит ток $dI = j_\tau \cdot h \cdot dl$ (рис. 4.7, а). На единицу длины линии l приходится ток, численно равный

$$(\partial I / \partial l) = j_\tau \cdot h. \quad (4.7)$$

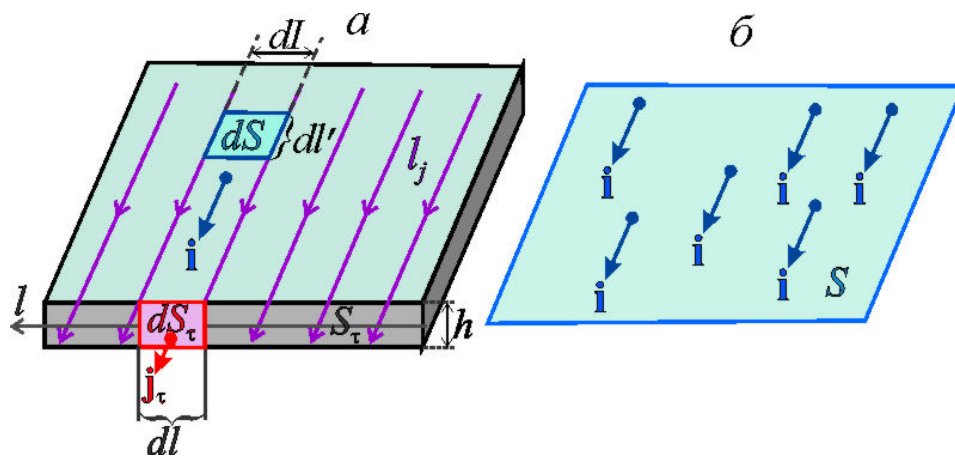


Рис. 4.7.

Переход от полной тангенциальной компоненты j_τ объёмного тока в слое с толщиной h к поверхностной плотности тока i

Чтобы перейти от объёмного тока в тонком слое к поверхностному току на поверхности S (рис. 4.7, б), мысленно сжимаем слой до нулевой толщины, сохраняя без изменения произведение $j_\tau \cdot h$, для чего считаем, что

$$\text{при } h \rightarrow 0 \quad j_\tau \rightarrow \infty \text{ как } 1/h. \quad (4.6')$$

Вектор

$$\mathbf{i} = \mathbf{1}_\tau \cdot \frac{\partial I}{\partial l} = \mathbf{j}_\tau \cdot h \quad (4.7')$$

называют поверхностной плотностью тока в отличие от величины \mathbf{j} , которая является объёмной плотностью тока. Направление вектора \mathbf{i} совпадает с направлением поверхностного тока, а абсолютная величина его равна количеству электричества (положительного), проходящего в единицу времени через единичный отрезок линии l , поперечной поверхностному току. Согласно (4.6), (4.6') в точках, в которых имеются необъёмные токи, $j = \infty$ и, следовательно, производная $\text{div } \mathbf{j}$ теряет смысл.

Из равенства (4.4), пользуясь которым, мы получили дифференциальное уравнение (4.5) для поля \mathbf{j} , можно также получить поверхностную форму этого уравнения. Выделим на поверхности S участок ΔS , ограниченный замкнутой линией $l[\Delta S]$, и заключим его в замкнутую поверхность S , пересекающую поверхность S по этой линии и построенную, как показано на рис. 1.8 (см. часть I, главу первую). Заряд $e_{\text{цсвб}}$, находящийся внутри поверхности S , и его производную по времени $de_{\text{цсвб}}/dt$ определяют формулы

$$e_{\text{цсвб}} = \int_{\Delta S} \sigma_{\text{свб}} dS, \quad \frac{de_{\text{цсвб}}}{dt} = \int_{\Delta S} \frac{\partial \sigma_{\text{свб}}}{\partial t} dS, \quad (4.8)$$

где $\partial \sigma_{\text{свб}} / \partial t$ – производная по времени t от поверхностной плотности $\sigma_{\text{свб}}$

свободного поверхностного заряда на поверхности S . Поэтому согласно (4.4)

$$\oint_S (\mathbf{j} \, d\mathbf{S}) = - \int_{\Delta S} \frac{\partial \sigma_{\text{свб}}}{\partial t} dS. \quad (4.9)$$

При достаточной малости h и ΔS левая часть (4.9) согласно (1.47) равна $\Delta S \cdot \text{Div } \mathbf{j}$, а правая часть равна $\frac{-\partial \sigma_{\text{свб}}}{\partial t} \cdot \Delta S$. Следовательно, поверхностная дивергенция

$$\text{Div } \mathbf{j} = \frac{-\partial \sigma_{\text{свб}}}{\partial t}, \quad j_n^{(2)} - j_n^{(1)} = \frac{-\partial \sigma_{\text{свб}}}{\partial t}. \quad (4.10)$$

Формула (4.10)₂ соответствует определению поверхностной дивергенции (1.49); она справедлива для поверхности S , на которой нет поверхностного тока, и, следовательно, компонента j_τ имеет ограниченные значения. Если же на поверхности S поверхностная плотность $\mathbf{i} \neq 0$, то на ней компонента объёмной плотности электрического тока $j_\tau = \infty$ и согласно (1.57)

$$\text{Div } \mathbf{j} = j_n^{(2)} - j_n^{(1)} + \text{div}^S \mathbf{i}, \quad (4.11)$$

где $\text{div}^S \mathbf{i}$ – двумерная дивергенция (см. выражение (1.39) в главе первой) вектора \mathbf{i} на поверхности S . Следовательно, при поверхностной плотности $\mathbf{i} \neq 0$ имеем вместо (4.10)₂

$$j_n^{(2)} - j_n^{(1)} + \text{div}^S \mathbf{i} = \frac{-\partial \sigma_{\text{свб}}}{\partial t}. \quad (4.12)$$

Согласно (4.10)₂ разрыв нормальной компоненты j_n вектора \mathbf{j} на поверхности S , на которой нет необъёмного (поверхностного) тока, равен взятой с обратным знаком производной по времени от плотности $\sigma_{\text{свб}}$ поверхностного свободного заряда на этой поверхности. Это вполне понятно. Действительно, нормальные компоненты $j_n^{(1)}$ и $j_n^{(2)}$ векторов $\mathbf{j}^{(1)}$ и $\mathbf{j}^{(2)}$ равны количествам электричества, проходящим в единицу времени через единичные площадки, параллельные поверхности S и расположенные около неё в областях V_1 и V_2 . Первое из этих количеств подходит к единичной площадке поверхности S из области V_1 а второе отходит от этой площадки в область V_2 (рис. 4.5, в).

Поэтому разность $j_n^{(1)} - j_n^{(2)}$ есть приращение заряда на этой площадке в единицу времени, а $j_n^{(2)} - j_n^{(1)}$ – скорость убывания этого заряда, равная $-\partial \sigma_{\text{свб}} / \partial t$.

В более общем случае, когда на поверхности S есть поверхностный ток с плотностью \mathbf{i} , изменение заряда площадки ΔS происходит не только за счёт разности между количествами электричества, приходящего к ней из области V_1 и отходящего от неё в область V_2 , но также за счёт потока

$$\oint_{l[\Delta S]} (\mathbf{i} \, [d\mathbf{l} \, \mathbf{n}]) = \int_{\Delta S} \text{div}^S \mathbf{i} \, dS \quad (4.13)$$

вектора \mathbf{i} через границу $l[\Delta S]$ этой площадки, которым определяется растекание

(положительное или отрицательное) электричества от неё к соседним частям поверхности S .

Если S – поверхность соприкосновения проводника с непроводящей средой, то, отмечая индексами 1 и 2 области, занятые соответственно проводником и непроводящей средой, имеем $j_n^{(2)}=0$. Поэтому, обозначая $j_n^{(1)}=j_n$, получаем для проводника у границы с изолятором согласно (4.10) при отсутствии поверхностного тока

$$j_n = \frac{\partial \sigma_{\text{свб}}}{\partial t}. \quad (4.10')$$

V. Дифференциальная форма закона Ома

Плотность тока, существующего в проводящей среде под действием электрического поля, пропорциональна напряжённости этого поля:

$$\mathbf{j} = \gamma \cdot \mathbf{E}, \quad \gamma = 1/\rho, \quad (4.14)$$

где \mathbf{j} и \mathbf{E} – плотность тока и напряжённость поля в какой-либо точке; γ и ρ – удельная электропроводность и удельное электрическое сопротивление среды в этой точке.

Обычно удельную электропроводность обозначают σ . Но в этой книге буквой σ греческого алфавита была обозначена поверхностная плотность источников поля (зарядов, масс).

Величина γ представляет собой параметр среды, определяющий способность среды пропускать электричество, движущееся под действием электрического поля, и численно равный плотности тока j в этой среде при единичной напряжённости поля \mathbf{E} в ней. Формула (4.14)₁ выражает закон Ома в дифференциальной форме.

Общеизвестен закон Ома для участка цепи электрического тока (закон Ома в интегральной форме), согласно которому (для "обычных" ионных или электронных проводников) ток I в некотором участке "1 2" цепи тока пропорционален действующему на этом участке напряжению \mathcal{E}_{12} электрического поля \mathbf{E} и обратно пропорционален сопротивлению R_{12} этого участка цепи (рис. 4.8, а, б):

$$I = \mathcal{E}_{12}/R_{12} = G_{12} \cdot \mathcal{E}_{12}$$

где $1/R_{12} = G_{12}$ – проводимость участка цепи электрического тока.

Закон Ома в дифференциальной форме (4.14) устанавливает (для "обычных" ионных

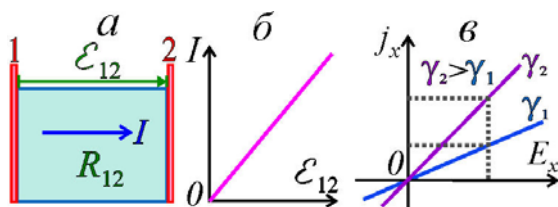


Рис. 4.8.

К закону Ома в интегральной (а, б);
и дифференциальной (в) формах

или электронных проводников) прямую пропорциональную зависимость между напряжённостью \mathbf{E} электрического поля и вектором плотности \mathbf{j} электрического тока. На рис. 4.8, в показаны соответствующие закону Ома в дифференциальной форме (4.4) зависимости скалярной компоненты j_x поля \mathbf{j} от компоненты E_x поля \mathbf{E} . На этом рисунке сопоставлены такие зависимости при $\gamma_2 > \gamma_1$.

Величины, входящие в закон Ома имеют следующие размерности: $[I]=\text{А}$, $[\mathcal{E}_{12}]=\text{В}$, $[R_{12}]=\text{Ом}$, $[G_{12}]=1/\text{Ом}=\text{Сим}$ (сименсы), $[j]=\text{А}/\text{м}^2$, $[E]=\text{В}/\text{м}$, $[\rho]=\text{Ом}\cdot\text{м}$, $[\gamma]=\text{Сим}/\text{м}$.

В соответствии с изложенным в главе третьей на электростатическое поле оказывают

влияние диэлектрики ($\epsilon > 1$), а на магнитоэлектрическое – магнетики ($\mu \neq 1$). Такие среды (тела) характеризуют соответственно диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 1 + \chi$ и магнитная проницаемость $\mu = 1 + \alpha$. В отсутствие среды (в вакууме, а практически, и в воздухе) $\epsilon = 1$, $\mu = 1$.

Среди тех сред, которые могут оказывать влияние на результаты некоторых геофизических методов, наибольшую диэлектрическую проницаемость имеет вода ($\epsilon \approx 81$ при нормальных условиях). У большинства таких сред магнитная проницаемость $\mu \approx 1$. Более высокие значения μ имеют, например, магнетиты ($\mu < 25$), а также стальные конструкции (μ – порядка 10^2), которые могут оказывать влияние на результаты некоторых геофизических методов. Т. е. (применительно к условиям при геофизических исследованиях) пределы изменения проницаемостей ϵ и μ – не очень велики.

Иначе обстоит дело с удельным электрическим сопротивлением ρ . У металлов и сплавов $\rho \approx 10^{-8} - 10^{-6}$ Ом·м, а у ряда минералов и некоторых горных пород $\rho = 10^5 - 10^6$ Ом·м и более. В последнем случае применительно к геофизическим исследованиям такие среды, а также воздух, можно обычно рассматривать, как изоляторы. В связи со сказанным будем пользоваться понятиями (идеальный) изолятор ($\rho = \infty$) и идеальный проводник ($\rho = 0$) (см. разделы II, III § 5).

Возвращаясь к формуле (4.2'), отметим, что в поле \mathbf{E} к микрозарядам приложены силы, сообщающие им некоторые ускорения, но среда тормозит движение микрозарядов и препятствует накоплению их скоростей. Механизм этого торможения, может быть различным, например, в металле это соударения электронов с ионами кристаллической решётки. Но при любом характере торможения оно приводит к тому, что средняя скорость микрозарядов пропорциональна напряжённости поля \mathbf{E} . Если, например, в области пространства, занятой раствором соли (электролитом), действует электрическое поле \mathbf{E} , то положительные и отрицательные ионы имеют скорости $\mathbf{w}^+ = u^+ \cdot \mathbf{E}$, $\mathbf{w}^- = -u^- \cdot \mathbf{E}$, где u^+ и u^- – положительные множители пропорциональности, называемые подвижностями ионов. Подставляя эти выражения для \mathbf{w}^+ и \mathbf{w}^- в формулу (4.2')₃ и сравнивая её с (4.14), получаем

$$\mathbf{j} = (u^+ \cdot \delta^+ + u^- \cdot \delta^-) \cdot \mathbf{E}, \quad \gamma = u^+ \cdot \delta^+ + u^- \cdot \delta^-. \quad (4.14')$$

VI. Тензор удельной электропроводности

Согласно (4.14) вектор \mathbf{j} отличается от вектора \mathbf{E} только скалярным, (положительным в проводящей среде) множителем γ , и, следовательно, направление вектора плотности тока \mathbf{j} совпадает с направлением электрического поля \mathbf{E} , вызывающего этот ток, и токовые линии l_j следуют по силовым линиям l_E (при отсутствии сторонних сил, см. § 3). Для любого направления l компонента $j_l = \gamma \cdot E_l$ и, в частности, для координатных направлений l_k $j_k = \gamma \cdot E_k$ ($k=1, 2, 3$). Однако это справедливо только для изотропной проводящей среды, т. е. среды, удельная электропроводность которой не зависит от направления. Некоторые среды и, в частности, некоторые горные породы отличаются анизотропной электропроводностью. Их способность пропускать электричество, движущееся под действием электрического поля, различна в разных направлениях. Анизотропия горных пород может быть обусловлена их трещиноватостью, рассланцованностью или микрослоистостью.

В анизотропной среде вектор \mathbf{j} равен скалярному произведению тензора электропроводности

$$\hat{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \gamma_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \gamma_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.14'')$$

на вектор \mathbf{E} : $\mathbf{j} = \hat{\gamma} \cdot \mathbf{E}$. Это означает, что компоненты вектора \mathbf{j} линейно зависят от компонент вектора \mathbf{E}

$$j_i = \sum_k^k \gamma_{ik} \cdot E_k \quad (k = x, y, z; i = x, y, z), \quad (4.15)$$

где множители γ_{ik} являются компонентами тензора (удельной) электропроводности $\hat{\gamma}$. Таким образом, в случае анизотропной среды следует в (4.14) считать γ тензором. Этот тензор симметричный ($\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$); его определяют шесть значений компонент γ_{ik} . Если соответствующим образом выбрать направления осей X, Y, Z , то получим $\gamma_{ik} = 0$ при $i \neq k$ и, следовательно, $j_i = \gamma_{ii} \cdot E_i$, т. е.

$$j_x = \gamma_x \cdot E_x, \quad j_y = \gamma_y \cdot E_y, \quad j_z = \gamma_z \cdot E_z, \quad (4.15')$$

где $\gamma_x = \gamma_{xx}$, $\gamma_y = \gamma_{yy}$, $\gamma_z = \gamma_{zz}$.

При этих направлениях осей X, Y, Z декартовы компоненты вектора \mathbf{j} пропорциональны соответствующим компонентам вектора \mathbf{E} , но (в общем случае) множители пропорциональности $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ имеют разные значения.

Наиболее часто применяемой для характеристики удельной электропроводности анизотропных горных пород является модель среды с осевой анизотропией (одноосно – анизотропная или трансверсально – изотропная среда). Такую среду характеризуют два значения удельной электропроводности γ : *поперечная* γ_n по оси анизотропии n (ориентированной, например, по нормали к напластованию прослоев) и *продольная* γ_t по любому направлению t в плоскости, нормальной к направлению n и называемой плоскостью анизотропии. *Коэффициент* электрической *анизотропии* $\lambda = (\gamma_t / \gamma_n)^{1/2} = (\rho_n / \rho_t)^{1/2}$. В одноосно – анизотропной среде $1/\gamma_n = \rho_n$ и $1/\gamma_t = \rho_t$ – поперечное и продольное удельные электрические сопротивления, причём $\rho_n > \rho_t$, $\gamma_t > \gamma_n$, $\lambda > 1$.

Этот, случай анизотропии будем здесь иметь в виду. Взяв систему x, y, z с осью Z по оси анизотропии n , имеем $\gamma_x = \gamma_y = \gamma_t$, $\gamma_z = \gamma_n$.

Векторы, \mathbf{E} и \mathbf{j} связаны (в этом случае), соотношениями

$$j_t = \gamma_t \cdot E_t, \quad j_n = \gamma_n \cdot E_n \quad (4.15'')$$

и образуют с направлением оси анизотропии n углы, определяемые формулами

$$\text{tg}(\mathbf{E}, n) = \frac{E_\tau}{E_n}, \quad \text{tg}(\mathbf{j}, n) = \frac{j_\tau}{j_n} = \frac{\gamma_t}{\gamma_n} \cdot \frac{E_\tau}{E_n} = \frac{\gamma_t}{\gamma_n} \cdot \text{tg}(\mathbf{E}, n), \quad (4.15''')$$

где E_τ и j_τ – полные тангенциальные компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{j} в плоскости,

ортогональной оси анизотропии n . Из (4.15''') следует, что при $\gamma_n < \gamma_t$ угол $(\mathbf{j}, n) = \alpha_j \geq \alpha_E = (\mathbf{E}, n)$ (рис. 4.9), где знак равенства соответствует случаю, когда $E_n = 0$ или $E_\tau = 0$.

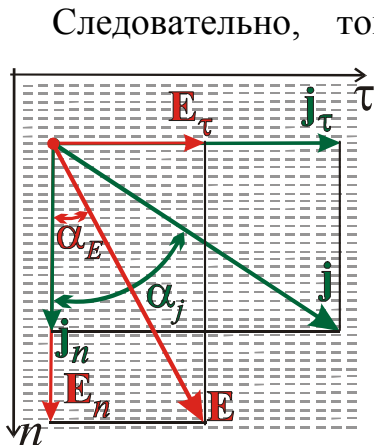


Рис. 4.9.

Векторы \mathbf{E} и \mathbf{j} в
однородной
анизотропной среде

Следовательно, токовые линии l_j отклоняются от направления n наименьшей удельной электропроводности сильнее силовых линий l_E ; направления векторов \mathbf{j} и \mathbf{E} (направления токовых и силовых линий) в произвольно взятой точке анизотропной среды не совпадают. Однако, если в какой-либо точке один из векторов имеет направление n или t , то в этой точке другой вектор имеет то же направление.

Анизотропный проводник (проводящая среда), как и изотропный, может быть однородным или неоднородным.

Диэлектрики и магнетики, как и проводники, могут быть анизотропными. Среду, анизотропную в отношении диэлектрической или магнитной проницаемости, характеризуют тензоры проницаемости $\hat{\epsilon}$, $\hat{\mu}$, аналогичные тензору $\hat{\gamma}$. В дальнейшем (как и в предыдущем изложении) будем предполагать, что среда изотропна.

§ 2. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

Перейдём к случаю, когда в любой точке a вектор \mathbf{j} не меняется со временем, т. е. когда производная по времени t от этого вектора равна нулю. В этом случае имеем постоянный (стационарный) ток. При постоянном поле вектора \mathbf{j} , согласно (4.14)₁, электрическое поле \mathbf{E} также должно быть постоянным, из чего следует, что для источников поля \mathbf{E} – полных электрических зарядов и их плотностей должны выполняться условия

$$\frac{de_{V_{\text{плн}}}}{dt} = 0, \quad \frac{\partial \delta_{\text{плн}}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{\text{плн}}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \lambda_{\text{плн}}}{\partial t} = 0, \quad \frac{de_{q_{\text{плн}}}}{dt} = 0, \quad (4.16)$$

т. е. все (полные) источники поля \mathbf{E} и их плотности должны быть неизменными (постоянными), что соответствует условию (2.7) постоянства поля \mathbf{f} .

Условие (4.16) совместимо с движением зарядов. Действительно, выделим из токовой трубки (рис. 4.2) с малыми поперечными размерами элементарный отрезок, заключённый между её поперечными сечениями dS_1 и dS_2 , и допустим, что в этом отрезке трубки ток направлен от dS_1 к dS_2 . Выполнение условия $\partial \delta_{\text{плн}} / \partial t = 0$ в объёме dV этого отрезка токовой трубки означает постоянство (полного) количества электричества $de_{\text{плн}} = \delta_{\text{плн}} \cdot dV$ в нём, а для этого достаточно, чтобы за любой промежуток времени dt через границы этого элемента (площадки dS_1 и dS_2) в элемент dV проходили, одинаковые количества электричества. При этом заряд $de = de_{\text{плн}}$, находящийся в элементе dV , является постоянным, но не статическим (он остаётся *таким же, но не тем же*), так как непрерывно *возобновляется* ("стационарное", а не "статическое" поле). Таким

образом, при плотности электрического тока $\mathbf{j} \neq 0$ мы можем иметь $\partial \delta_{\text{плн}} / \partial t = 0$, $\partial \delta_{\text{свб}} / \partial t = 0$ (а также $\delta_{\text{плн}} = 0$ и $\delta_{\text{свб}} = 0$, см. раздел I § 1).

Постоянное электрическое поле \mathbf{E} в проводящей среде, как и постоянное поле вектора \mathbf{j} , будем называть *стационарным*.

Некоторые авторы называют стационарным гармонически меняющееся поле (см. начало § 6 главы шестой).

I. Уравнение непрерывности постоянного тока

Подставляя условие (4.16) в (4.4), (4.5), (4.10), получаем для постоянного тока

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \operatorname{Div} \mathbf{j} = 0, \quad \oint_S (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}) = 0. \quad (4.17)$$

Равенства (4.17) представляют собой дифференциальную, поверхностную и интегральную формы уравнения непрерывности постоянного тока. Согласно этим равенствам постоянное поле вектора \mathbf{j} является всюду соленоидальным; оно не имеет источников. В этом поле векторные линии l_j , т. е. токовые линии нигде не обрываются; они должны быть замкнутыми. Если токовые линии продолжаются в обе стороны до бесконечности, то можно считать, что они там замыкаются.

В соответствии с (4.11) равенство (4.17)₂ может быть представлено в виде

$$j_n^{(2)} - j_n^{(1)} = -\operatorname{div}^S \mathbf{i}. \quad (4.18)$$

В обычном случае, когда на поверхности S нет поверхностного тока ($\mathbf{i} = 0$), принимая во внимание закон Ома в дифференциальной форме (4.14)₁, получаем

$$j_n^{(2)} = j_n^{(1)}, \quad \gamma_2 \cdot E_n^{(2)} = \gamma_1 \cdot E_n^{(1)}, \quad (4.18')$$

где γ_1 и γ_2 – удельные электропроводности сред с обеих сторон поверхности S .

В проводнике у границы проводника (с изолятором) в соответствии с (4.10') для постоянного тока компонента $j_n = 0$, т. е. эта граница является токовой

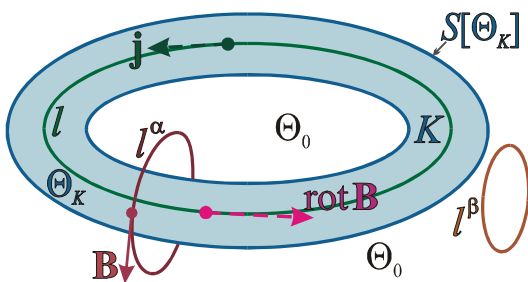


Рис. 4.10.

Изображение цепи тока в виде токового кольца K .

Поверхность $S[\Theta_K]$ кольца K делит пространство на внутреннюю Θ_K и внешнюю Θ_0 области. В области Θ_0 есть контуры l^α , сцепленные с K , и контуры l^β , не сцепленные с K (см. главу пятую)

поверхностью (S_6). Таким образом, поверхность цепи тока, поверхность её соприкосновения с окружающей непроводящей средой (изоляцией), является токовой поверхностью, а цепь тока – токовой трубкой. Эта трубка может быть мысленно расщеплена (разделена токовыми поверхностями) на более тонкие и, в частности, на элементарные токовые трубки. Согласно сказанному выше, токовые трубки и, в частности, цепи постоянного тока должны быть замкнутыми.

Схематически можно изобразить замкнутую цепь тока в виде кольца K (рис. 4.10) или замкнутой линии l (токовое

кольцо, контур тока) произвольной формы.

Из соленоидальности поля \mathbf{j} следует, что потоки вектора \mathbf{j} через все непродольные сечения одной и той же токовой трубки и, в частности, токовой цепи имеют одно и то же значение. Обозначая через I' и I'' электрический ток через произвольно взятые сечения S' и S'' цепи тока с нормальными, направленными от S' к S'' (по току), имеем в соответствии с (4.17)₃

$$I''=I'. \quad (4.19)$$

Таким образом, постоянный ток во всех непродольных сечениях проводника (цепи) определяется его значением I для какого-либо одного из них.

Применим (4.17)₃ к замкнутой поверхности S_q , охватывающей точку q разветвления линейных токов I_k ($k=1, 2, \dots$) (рис. 4.11). Подынтегральное выражение в (4.17)₃ обращается в нуль на всей площади поверхности S_q , кроме её исчезающе малых участков ΔS_k , являющихся сечениями токов I_k . Поэтому получаем в результате интегрирования сумму потоков вектора \mathbf{j} через эти сечения, равную сумме токов I_k , если условиться отрицательными считать токи, направленные к точке разветвления q , и положительными – направленные от этой точки. Следовательно, согласно (4.17)₃ получаем

$$\sum I_k = 0. \quad (4.20)$$

В более общем случае переменных токов получаем из (4.4)

$$\sum I_k = -\frac{de_q}{dt}. \quad (4.20')$$

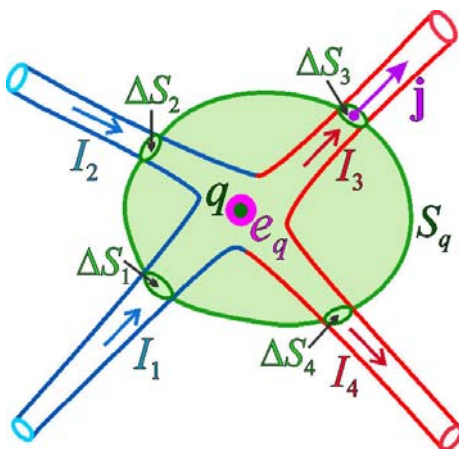


Рис. 4.11.

Поток вектора \mathbf{j} через замкнутую поверхность S_q , внутри которой находится разветвление линейных (квазилинейных) токов

Равенство (4.20) является линейной формой уравнения непрерывности постоянного тока и выражает первый закон Кирхгофа. Можно сказать, что равенства (4.17) выражают этот закон в дифференциальной, поверхностной и интегральной формах. Формула (4.20), очевидно, применима также к разветвлению токов, не являющихся линейными, если для них значения I_k являются определёнными.

Поверхность $S[\Theta_K]$ токового кольца (см. рис. 4.10) делит пространство на две кольцевидные (двухсвязные) области Θ_K и Θ_0 , из которых первая занята токовыми линиями, а вторая охватывается ими. В случае линейной цепи область Θ_0 занимает всё пространство, за исключением замкнутой линии, в которую вырождается область Θ_K . В случае пространственной цепи (ток в земле на большой глубине) область Θ_0 может вырождаться в замкнутую «линию», охватываемую токовыми линиями, заполняющими «всё пространство», т. е. очень большую область Θ_K .

II. Поле \mathbf{E} и его потенциал U

Постоянное электрическое поле \mathbf{E} в проводнике не отличается по своей природе от статического поля \mathbf{E} в непроводящей среде или вакууме; это – то же поле кулоновых сил, создаваемое электрическими зарядами, и для него справедливы уравнения (3.24), (3.14)₁, т. е. система

$$\text{I. rot } \mathbf{E}=0, \quad \text{II. div } \mathbf{E}=\delta_{\text{плн}}/\varepsilon_0 \quad (\text{div } \mathbf{D}=\delta_{\text{свб}}). \quad (4.21)$$

Подставляя в (4.14) решение $\mathbf{E}=-\text{grad } U$ уравнения (4.21)₁, получаем для вектора \mathbf{j} и его компоненты j_l по любому направлению l выражения через потенциал U :

$$\mathbf{j}=-\gamma \cdot \text{grad } U, \quad j_l=-\gamma \cdot \partial U / \partial l. \quad (4.22)$$

Из (4.22) следует, что направление тока, возникающего под действием электрического поля, совпадает с направлением наиболее интенсивного падения потенциала; вектор плотности \mathbf{j} этого тока образует квазипотенциальное поле $-\gamma(a) \cdot \text{grad } U(a)$ (см. раздел I § 6 главы первой). На токовой поверхности компонента $j_n=0$ и, следовательно, $E_n=0$, $\partial U / \partial n=0$, а поверхность S_j , поперечная токовым линиям l_j , является эквипотенциальной. Поток вектора \mathbf{j} через какую-либо поверхность S согласно (4.22) выражает формула

$$I_S = -\int_S \gamma \cdot \frac{\partial U}{\partial n} dS = -\int_S \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial U}{\partial n} dS. \quad (4.22')$$

Если в этой формуле S – сечение цепи тока, то $I=|I_S|$ – электрический ток в цепи.

На поверхности S , на которой нет поверхностного тока, имеем согласно (4.18') и (4.22)

$$\gamma_2 \cdot \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} = \gamma_1 \cdot \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n}. \quad (4.23)$$

При $\gamma_2 \neq \gamma_1$ нормальная производная потенциала $\partial U / \partial n$ терпит разрыв на поверхности S , но произведение этой производной на удельную электропроводность среды непрерывно на этой поверхности.

III. Сопротивление участка цепи тока

Разность потенциалов U_1-U_2 между двумя поперечными (эквипотенциальными) сечениями цепи тока S_1 и S_2 , согласно (2.39'), равна напряжению \mathcal{E}_{12} между ними, т. е. "работе" поля \mathbf{E} на пути l_{12} (рис. 4.12, а), их соединяющем:

$$U_1 - U_2 = \mathcal{E}_{12}, \quad \mathcal{E}_{12} = \int_1^2 (\mathbf{E} \, d\mathbf{l}) = \int_1^2 \rho \cdot (\mathbf{j} \, d\mathbf{l}), \quad (4.24)$$

где в соответствии с (4.14) $(\mathbf{E} \, d\mathbf{l}) = \rho \cdot (\mathbf{j} \, d\mathbf{l})$.

Следовательно,

$$\mathcal{E}_{12} = U_1 - U_2 = I \cdot R_{12}, \quad (4.24')$$

где

$$R_{12} = \int_1^2 \rho \cdot \left(\frac{\mathbf{j}}{I} d\mathbf{l} \right), \text{ а при } \rho = \text{const } R_{12} = \rho \cdot \int_1^2 \left(\frac{\mathbf{j}}{I} d\mathbf{l} \right). \quad (4.25)$$

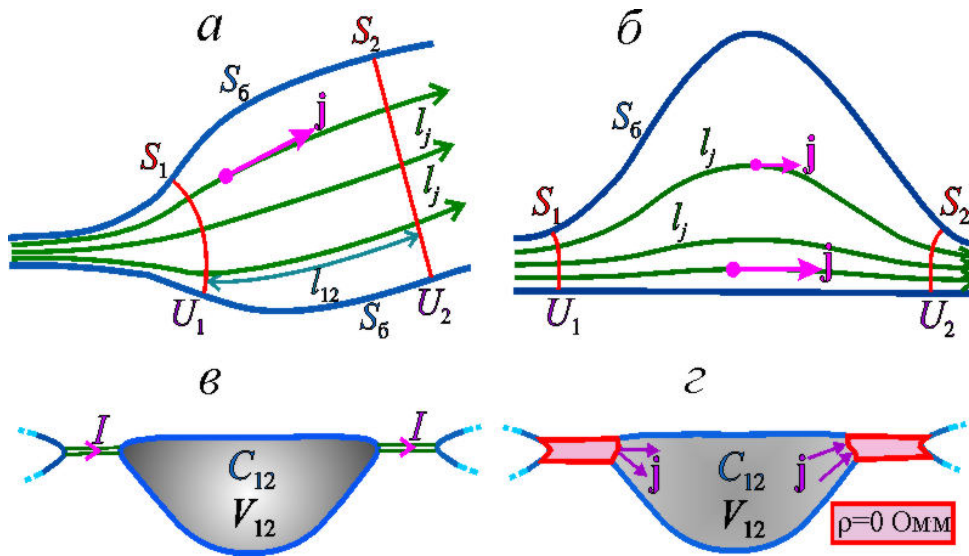


Рис. 4.12.

Участок C_{12} цепи тока.

Границы S_1, S_2, S_6 участка C_{12} , определяющие поле \mathbf{j}/I на этом участке (а); схема, показывающая, что в токовых трубках, в которых отрезки l_{12} токовых линий (между сечениями S_1 и S_2) короче, плотность тока j больше (б); автономный участок цепи, заключённый между сечениями квазилинейных проводников (в); автономный участок цепи, заключённый между идеальными проводниками (з)

Путь l_{12} берётся по направлению тока I ; в тех случаях, когда будем допускать в (4.25), что путь l_{12} направлен против тока, будем считать $I < 0$, для того чтобы иметь всегда $R_{12} > 0$.

Величину R_{12} назовём сопротивлением участка цепи C_{12} между её поперечными сечениями S_1 и S_2 , на котором ток проходит от S_1 к S_2 . Область пространства V_{12} , занятая этим участком цепи, ограничена замкнутой поверхностью, состоящей из его боковой поверхности S_6 (см. рис. 4.12, а), являющейся отрезком поверхности цепи тока, и сечений цепи S_1 и S_2 . На поверхности S_6 потенциал U удовлетворяет условию $\partial U / \partial n = 0$, а на сечениях S_1 и S_2 – условиям

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad \int_S \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial U}{\partial n} dS = -I,$$

где t и n – направления, касательные и нормальные к этим сечениям.

Этими краевыми условиями (II и III типов) и значениями удельного электрического сопротивления ρ во всех точках области V_{12} , как будет показано в § 7, полностью определяется поле вектора \mathbf{j} во всей области V_{12} , причём значения этого вектора оказываются пропорциональными току I . Поэтому поле вектора \mathbf{j}/I также вполне определяется в области V_{12} заданием её границ (S_6, S_1 и S_2) и удельного сопротивления ρ среды, заполняющей эту область; оно не

зависит от I .

Таким образом, согласно (4.25), величина R_{12} полностью определяется проводником, образующим участок цепи между её эквипотенциальными сечениями S_1 и S_2 , его формой, размерами и удельным электрическим сопротивлением. Она не зависит от тока I в цепи и на неё не влияют изменения остальной части цепи, не вызывающие нарушений эквипотенциальности поверхностей S_1 и S_2 .

Вполне понятно, что, говоря о сопротивлении проводника, мы имеем в виду определённый способ введения его в цепь (при котором определённые участки S_1 и S_2 его поверхности являются эквипотенциальными сечениями цепи). Равенство (4.24') выражает закон Ома, согласно которому ток I равен отношению разности потенциалов U_1-U_2 между эквипотенциальными границами участка цепи к сопротивлению R_{12} проводника C_{12} , образующего этот участок. Величина R_{12} определяет способность проводника сопротивляться прохождению электрического тока и численно равна значению разности потенциалов U_1-U_2 , при которой через проводник C_{12} проходит ток I единичной величины. Определив величины U_1-U_2 и I при помощи измерений, можно вычислить сопротивление R_{12} проводника, пользуясь формулой (4.24').

Для расчёта R_{12} по формуле (4.25) следует подставить в неё значения функций \mathbf{j} и ρ на отрезке какой-либо токовой линии, взятом между сечениями S_1 и S_2 . Функция ρ предполагается заданной, в области V_{12} , а для построения токовой линии и определения функции \mathbf{j} на ней надо знать поле $\mathbf{j}=\gamma\cdot\mathbf{E}$ в этой области. Таким образом, расчёт сопротивления R_{12} сводится к трудному в общем случае расчёту электрического поля \mathbf{E} в области V_{12} .

Если величина j имеет одно и то же значение во всех точках каждого поперечного (току) сечения S участка C_{12} , то

$$j = \frac{I}{S}, \quad R_{12} = \int_1^2 \rho \cdot \frac{dl}{S}, \quad R_{12} = \rho \cdot \int_1^2 \frac{dl}{S}, \quad (4.26)$$

где (4.26)₃ соответствует случаю однородного (по ρ) участка C_{12} .

Характер поля вектора \mathbf{j} между поперечными сечениями S_1 и S_2 определяет следующее требование. Результат интегрирования в (4.24) должен иметь одно и то же значение по всем токовым линиям на участке цепи C_{12} между этими сечениями. Для этого на участке C_{12} плотность тока j на линиях l_j , более длинных или проходящих через части проводника с большим удельным сопротивлением ρ , должна быть меньше, чем на линиях, более коротких (рис. 4.12, б) или проходящих через части проводника с большей удельной электропроводностью γ .

Если участок C_{12} между эквипотенциальными сечениями S_1 и S_2 представляет собой однородный по ρ прямой цилиндр произвольного поперечного сечения, то указанному требованию удовлетворяет однородное поле вектора \mathbf{j} , параллельное образующей цилиндра с плотностью тока $j=I/S$; где S – площадь поперечного сечения цилиндра. При этом между сечениями S_1 и S_2 отрезки l_{12} токовых линий – одинаковы и произведение $\rho \cdot j$ имеет всюду

одинаковое значение (рис. 4.13, а). Именно такое поле в данном случае удовлетворяет краевым условиям, указанным выше. Для этого случая согласно (4.26)₃ и (4.24')

$$R_{12} = \frac{\rho \cdot l_{12}}{S}, \quad I = \frac{U_1 - U_2}{l_{12}} \cdot \frac{S}{\rho}. \quad (4.27)$$

Если однородный цилиндрический проводник включён в цепь тока так, что у его концов эквипотенциальные сечения S_1 и S_2 цепи тока не совпадают с поперечными сечениями цилиндра (рис. 4.13, б), то для участка C_{12} цепи тока между её сечениями S_1 и S_2 условия, для которых мы получили формулы (4.27),

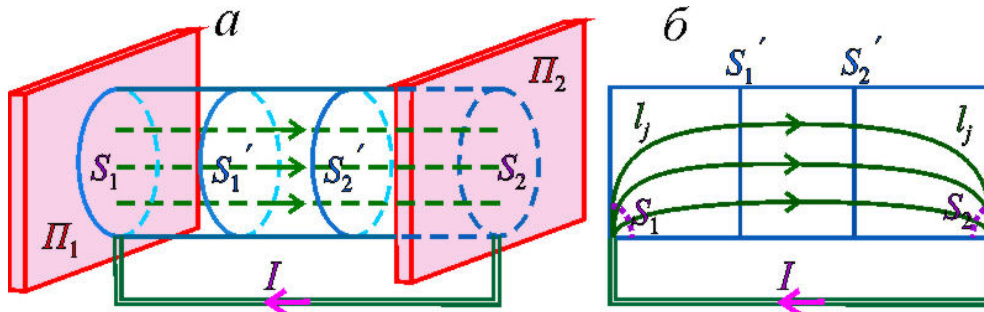


Рис. 4.13.

Сопrotивление цилиндрического проводника.

Любые два поперечных сечения S_1', S_2' прямого цилиндра, являющиеся поперечными сечениями тока и выделяющие участок C_{12} , к которому применимы формулы (4.27) (а); сечения S_1', S_2' в средней части цилиндра ограничивающие участок C_{12} , к которому применимы формулы (4.27) (б)

не выполняются. Но искажения поля, вызываемые отклонениями эквипотенциальных поверхностей S_1 и S_2 от поперечных сечений цилиндра, не отражаются на распределении поля вектора \mathbf{j} в части цилиндра, достаточно удалённой от S_1 и S_2 . Поэтому к любому отрезку этого цилиндра, заключённому между его поперечными сечениями S_1' и S_2' , достаточно далёкими от S_1 и S_2 , применимы формулы (4.27).

Эти формулы справедливы также для квазилинейного участка цепи. Так будем называть участок цепи, если любой его отрезок достаточной длины сравнительно с линейными размерами его поперечного сечения (форма которого может быть произвольной) можно считать однородным цилиндром. Проводники, образующие квазилинейные участки цепи, и токи в этих проводниках будем также называть квазилинейными. Частным случаем квазилинейного проводника является однородный цилиндрический участок C_{12} .

Применяемые в технике проволоки и шины, за исключением их слишком сильно изогнутых участков, являются квазилинейными проводниками. Токовые линии в квазилинейном проводнике параллельны его осевой линии, в качестве которой может быть; взята любая из них. Часто квазилинейный проводник мысленно заменяют линейным проводником, совпадающим с его осью.

Применяя (4.27)₂ к элементарному отрезку dl квазилинейной элементарной токовой трубки, имеем

$$dI = -\frac{dU}{dl_j} \cdot \frac{dS_j}{\rho}, \quad \mathbf{1}_j \cdot \frac{dU}{dS_j} = -\frac{\mathbf{1}_E}{\rho} \cdot \frac{dU}{dl_j},$$

где $\mathbf{1}_j \cdot dI = \mathbf{j} \cdot dS_j$, $\mathbf{1}_E \cdot dU = -\mathbf{E} \cdot dl_j$, $\mathbf{1}_j = \mathbf{1}_E$; dS_j – площадь поперечного сечения токовой трубки, а dI и j – электрический ток и плотность тока в ней. Таким образом, из закона Ома (4.24') получаем формулу (4.14), которая выражает этот закон применительно к элементу объёма проводника. Отсюда указанное выше название формулы (4.14).

IV. Коэффициент участка цепи тока

Если участок C_{12} цепи электрического тока однороден ($\rho = \text{const}$), то получаем в соответствии с (4.24'), (4.25)

$$R_{12} = \frac{\rho}{I} \cdot \int_1^2 (\mathbf{j} \, d\mathbf{l}), \quad \rho = K_{12} \cdot R_{12} = K_{12} \cdot \frac{U_1 - U_2}{I}, \quad (4.28)$$

где

$$K_{12} = \frac{1}{\int_1^2 \left(\frac{\mathbf{j}}{I} \, d\mathbf{l} \right)} = \frac{I}{\int_1^2 (\mathbf{j} \, d\mathbf{l})} \quad (4.29)$$

– коэффициент участка C_{12} – величина, обратная согласно (4.25)₂ множителю пропорциональности сопротивления R_{12} этого участка его удельному электрическому сопротивлению ρ .

Коэффициент K_{12} служит для перехода от сопротивления R_{12} к удельному электрическому сопротивлению ρ и зависит только от формы и размеров проводника C_{12} . Вычисление коэффициента K_{12} по формуле (4.29), как и определение R_{12} по формуле (4.25), сводится к расчёту поля в области V_{12} . В случаях, для которых получены формулы (4.26)₃ и (4.27)₁, имеем соответственно

$$K_{12} = \frac{1}{\int_1^2 \frac{dl}{S}}, \quad K_{12} = \frac{S}{l_{12}}. \quad (4.29')$$

Следует иметь в виду, что сопротивление R_{12} как величина, характеризующая участок цепи (проводник) C_{12} , имеет вполне определённый смысл только при условии полной независимости значения интеграла в правой части (4.25) от остальной части цепи. Но, согласно сказанному выше, на значение этого интеграла не влияют изменения остальной части цепи, только если они не вызывают нарушения эквипотенциальности границ S_1 и S_2 участка C_{12} . В общем случае такие нарушения вполне возможны, когда изменения цепи электрического тока происходит вне участка C_{12} вблизи его границ.

Неопределённость понятия сопротивления R_{12} участка C_{12} полностью отпадает, когда его границы S_1 и S_2 не могут быть неэквипотенциальными, например, когда они являются сечениями линейных проводников или поверхностями идеальных проводников (см. [рис. 4.12, в, г](#) и § 5).

Пространственный участок C_{12} , ограниченный такими сечениями цепи, т. е. соединённый с соседними её участками при помощи линейных или идеальных проводников (с удельными электрическими сопротивлениями $\rho=0$), является автономным. В занимаемой им области V_{12} поля векторов \mathbf{j}/I и \mathbf{E}/I совершенно не зависят от остальной части цепи.

Геофизику приходится часто определять величину $R_{12}=(U_1-U_2)/I$ с целью характеристики пространственного участка цепи, не являющегося автономным. При этом следует иметь в виду, что в общем случае на сопротивление R_{12} участка C_{12} влияет не только его удельное электрическое сопротивление ρ , но и удельные сопротивления соседних участков цепи.

§ 3. СТОРОННЕЕ ПОЛЕ. РАБОТА В ЦЕПИ ТОКА

Согласно уравнению $\text{rot}\mathbf{E}=0$ и его интегральной форме $\oint_l(\mathbf{E} d\mathbf{l})=0$

векторные линии l_E постоянного электрического поля \mathbf{E} (силовые линии) не могут быть замкнутыми, а согласно уравнению $\text{div}\mathbf{j}=0$ векторные линии l_j постоянного поля \mathbf{j} (токовые линии) не могут быть разомкнутыми. Вместе с тем согласно закону Ома в дифференциальной форме (4.14) направления векторов \mathbf{E} и $\mathbf{j}=\gamma\cdot\mathbf{E}$ (в изотропной среде, где γ – положительная скалярная величина) – одинаковы. Легко видеть, что удовлетворить указанным условиям во всём пространстве можно только, положив $\mathbf{j}=0$ всюду и $\mathbf{E}=0$ в проводящей среде. Действительно, если где-либо имеются замкнутые токовые линии, то согласно (4.14)₁ там должны быть такие же силовые линии, а так как в постоянном поле \mathbf{E} замкнутых векторных линий быть не может, то не может быть и замкнутых векторных линий постоянного поля \mathbf{j} , связанного с полем \mathbf{E} соотношением (4.14)₁. Но разомкнутых линий постоянного тока, согласно (4.17), также не может быть, следовательно, постоянное поле вектора \mathbf{j} , связанное с вектором \mathbf{E} соотношением (4.14)₁, неосуществимо.

Физический смысл этого вывода состоит в том, что создать постоянный ток только электрическим полем \mathbf{E} нельзя и, следовательно, нельзя осуществить постоянное электрическое поле в проводящей среде с помощью одних только зарядов (кулоновых сил, создаваемых ими). В § 5 главы третьей уже было показано, что поле \mathbf{E} , создаваемое зарядами в присутствии проводника, меняется до тех пор, пока оно не обратится в нуль в проводнике. В частности, если введём в проводящую среду два одинаковых, но разноимённых заряда, то создаваемое ими электрическое поле вызовет ток, который будет их разряжать и, следовательно, ослаблять их поле до его полного обращения в нуль при полной нейтрализации зарядов. Но если в этом случае убьём электрических зарядов, вызываемую ток, синхронно компенсировать каким-либо способом и таким образом поддерживать источники поля \mathbf{E} неизменными, то это поле \mathbf{E} и поле $\mathbf{j}=\gamma\cdot\mathbf{E}$ окажутся постоянными.

I. Стороннее поле

Представим себе прямоугольный сосуд (из непроводящего материала), две противоположные стенки которого покрыты изнутри металлическими пластинами Π^+ и Π^- (рис. 4.14). Сообщим этим пластинам заряды $e^+=e>0$ и $e^-=-e$ и получим между ними электрическое поле \mathbf{E} с силовыми линиями, направленными от Π^+ к Π^- , и падение потенциала в этом же направлении (Z).

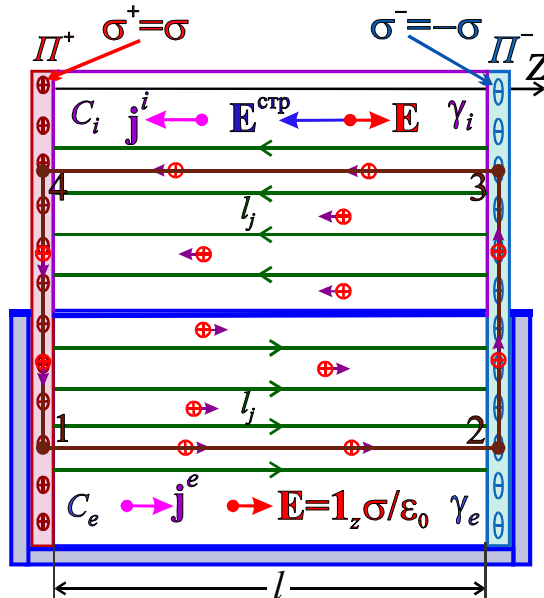


Рис. 4.14.

Схематическое изображение цепи постоянного тока, состоящей из внутренней (проводник C_i) и внешней (проводник C_e) частей, соединённых идеально проводящими пластинами Π^+ и Π^- . Четырёхугольником 12341 показан контур тока

цилиндрическим проводником C_i с удельной электропроводностью γ_i , внутри которого, кроме сил поля \mathbf{E} , направленного от положительной пластины к отрицательной, действуют сторонние (не электрические, не кулоновы, а, например, имеющие электрохимическую природу) силы $\mathbf{F}^{\text{стр}}$, образующие стороннее поле $\mathbf{E}^{\text{стр}}$, аналогичное электрическому полю \mathbf{E} в том смысле, что оно заставляет положительные заряды двигаться по направлению вектора $\mathbf{E}^{\text{стр}}$, а отрицательные — в противоположном направлении.

Поле $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ создаёт в проводнике C_i , электрический ток с плотностью $\gamma_i \cdot \mathbf{E}^{\text{стр}}$, которая складывается с плотностью $\gamma_i \cdot \mathbf{E}$ тока, создаваемого в этом проводнике электрическим полем \mathbf{E} . В результате имеем в проводнике C_i ток с плотностью $\mathbf{j}^i = \gamma_i \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}})$. Пусть поле $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ в C_i "сильнее" поля \mathbf{E} ($E^{\text{стр}} > E$) и направлено против него. Тогда векторы $(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}})$ и \mathbf{j}^i в проводнике C_i направлены против поля \mathbf{E} , и, следовательно, электричество (положительное) движется в этом проводнике от Π^- к Π^+ против поля \mathbf{E} . Электричество «нагнетается» под

Заполним сосуд жидким проводником C_e (раствором соли) с удельной электропроводностью γ_e , очень малой сравнительно с удельной электропроводностью пластин. Под действием поля \mathbf{E} в проводнике C_e возникнет ток с плотностью $\mathbf{j}^e = \gamma_e \cdot \mathbf{E}$ по направлению падения потенциала, и пластины будут разряжаться, вследствие чего величины e , E , j^e будут уменьшаться.

Но допустим, что выступающие над сосудом части пластин соединены однородным

действием сторонних сил (преобладающих в этом проводнике над силами электрического поля) в сторону подъёма потенциала U вместо того, чтобы стекать по этому проводнику так же, как по проводнику C_e , в сторону падения потенциала.

Для постоянства зарядов e^+ и e^- , их плотностей $\sigma^+=\sigma$ и $\sigma^-=-\sigma$ и их поля $\mathbf{E}=\mathbf{1}_z \cdot (\sigma/\epsilon_0)$ необходимо, чтобы электрический ток, нагнетающий электричество (положительное) против падения потенциала через проводник C_i , был равен току, разряжающего пластины через проводник C_e .

Если σ больше или меньше значения $\sigma(E^{\text{стр}})$ необходимого для такого равенства при данном поле $\mathbf{E}^{\text{стр}}$, то происходит переход электричества (положительного) от Π^+ к Π^- по C_e , или от Π^- к Π^+ по C_i , вследствие чего σ автоматически принимает значение $\sigma(E^{\text{стр}})$.

В схематически представленной выше цепи (см. рис. 4.14) силовые линии обрываются (на пластинах), а токовые линии – замкнутые, и это возможно потому, что на некотором участке цепи действует поле $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ и вектор $\mathbf{j}=\gamma \cdot (\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{стр}})$ оказывается направленным против поля \mathbf{E} вопреки соотношению (4.14)₁.

Каждая цепь постоянного тока должна содержать хотя бы один такой участок – источник тока (не смешивать с источниками поля вектора \mathbf{j}), например, батарею гальванических элементов, динамомашину. Эту «внутреннюю» (активную) часть цепи в приведенной схеме изображает проводник C_i , а её остальную – «внешнюю» часть – проводник C_e . Изображая цепь тока кольцом (контуром), будем различать в нём соответственно две части C_i и C_e , разделяемые сечениями (точками) S^- и S^+ , соответствующими полюсам источника тока.

Цепь тока может содержать несколько активных участков (на которых действуют сторонние силы), и на некоторых из них направление поля $\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{стр}}$ может совпадать с направлением поля \mathbf{E} (заряжающийся аккумулятор) но для простоты мы обычно будем предполагать, что стороннее поле действует только на одном участке цепи (рис. 4.15) и на нём $\mathbf{E}^{\text{стр}}=-m \cdot \mathbf{E}$, где $m>1$.

II. Электродвижущая сила

Напряжение стороннего поля

$$\mathcal{E}_{12}^{\text{стр}} = \int_1^2 (\mathbf{E}^{\text{стр}} \cdot d\mathbf{l}) \quad (4.30)$$

аналогично напряжению \mathcal{E}_{12} электрического поля \mathbf{E} , но по разным путям l_{12} между точками 1 и 2 оно может иметь различные значения. Будем считать, что заданное поле $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ коллинеарно полям \mathbf{E} и \mathbf{j} , и в выражении (4.30) для $\mathcal{E}^{\text{стр}}$ возьмём в качестве пути интегрирования отрезок токовой линии на участке C_{12} . Напряжение $\mathcal{E}_{12}^{\text{стр}}$ называют электродвижущей силой (э. д. с.) на участке C_{12} цепи тока.

Рассмотрим случай, когда длина активного участка C_{12} мала сравнительно с размерами его поперечного сечения, т. е. когда стороннее поле действует в

тонком слое C_{12} между поперечными сечениями цепи S_1 и S_2 по нормали n к этим сечениям. В этом случае электродвижущая сила

$$\mathcal{E}^{\text{стр}} = \int_1^2 E_n^{\text{стр}} dn = h \cdot E_n^{\text{стр ср}}, \quad (4.30')$$

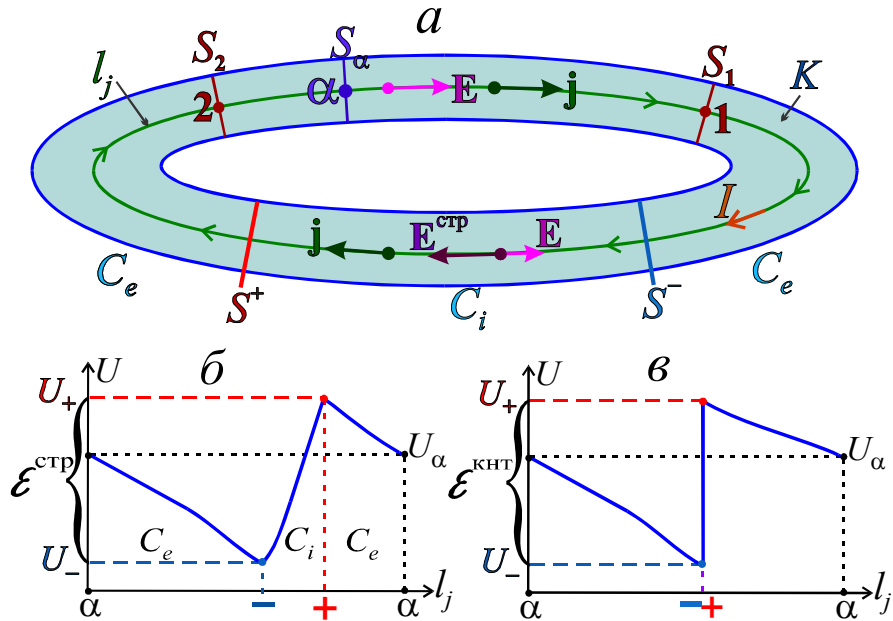


Рис. 4.15.

Токовое кольцо K , токовый контур l_j , две части кольца – внутренняя C_i и внешняя C_e .

Векторы \mathbf{E} , $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ и \mathbf{j} в обеих частях кольца K (а); график потенциала U по контуру l_j (б); то же, для случая контактной э. д. с. (в)

где $E_n^{\text{стр ср}}$ – среднее значение компоненты $E_n^{\text{стр}}$ на толщине h слоя. Полагая $h \rightarrow 0$, а $E_n^{\text{стр ср}} \rightarrow \infty$, причём произведение $h \cdot E_n^{\text{стр ср}} = \mathcal{E}^{\text{стр}}$ остаётся без изменения, получаем контактную э. д. с. (рис. 4.15, в):

$$\mathcal{E}_{12}^{\text{кнт}} = \int_1^2 E_n^{\text{стр}} dn = h \cdot E_n^{\text{стр}} \quad (h \rightarrow 0, E_n^{\text{стр}} \rightarrow \infty). \quad (4.31)$$

Величина $\mathcal{E}_{12}^{\text{кнт}}$ положительна, если поле $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ направлено от S_1 к S_2 , и отрицательна, если оно имеет противоположное направление.

III. Дополнение закона Ома

Из сказанного в разделе I следует, что соотношение (4.14)₁ между векторами \mathbf{j} и \mathbf{E} справедливо только для внешней части цепи тока. В общем же случае мы имеем, кроме поля \mathbf{E} , стороннее (некулоново) поле $\mathbf{E}^{\text{стр}}$, в котором электрические заряды движутся, как в поле \mathbf{E} . Следовательно, выражение (4.14)₁ для общего случая должно быть заменено соотношением

$$\mathbf{j} = \gamma \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}}) \quad (\rho \cdot \mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}}), \quad (4.32),$$

которое при $\mathbf{E}^{\text{стр}} = 0$, т. е. для внешней части цепи тока принимает вид (4.14)₁. В

соответствии с этим формулы, полученные в § 2 с помощью соотношения (4.14)₁, справедливы только для внешней части цепи. Для получения аналогичных формул, применимых в общем случае, надо вместо (4.14)₁ воспользоваться соотношением (4.32). Подставляя его в (4.17) и (4.24)₂ получаем

$$\operatorname{div}(\gamma \cdot \mathbf{E}) = -\operatorname{div}(\gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{стр}}), \operatorname{Div}(\gamma \cdot \mathbf{E}) = -\operatorname{Div}(\gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{стр}}), \oint_S \gamma(\mathbf{E} \, d\mathbf{S}) = -\oint_S \gamma(\mathbf{E}^{\text{стр}} \, d\mathbf{S}), \quad (4.33)$$

$$\mathcal{E}_{12} = I \cdot \int_1^2 \rho \cdot \left(\frac{\mathbf{j}}{I} \, d\mathbf{l} \right) - \int_1^2 (\mathbf{E}^{\text{стр}} \, d\mathbf{l}), \quad \mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_{12}^{\text{стр}} = I \cdot R_{12}. \quad (4.34)$$

Включая в участок C_{12} всю цепь тока и совершая по ней обход по току, получаем из (4.34)

$$\mathcal{E}^{\text{стр}} = I \cdot R, \quad \text{где } R = R_i + R_e = \oint \rho \cdot \left(\frac{\mathbf{j}}{I} \, d\mathbf{l} \right) \quad (4.34')$$

и

$$\mathcal{E}^{\text{стр}} = \oint (\mathbf{E}^{\text{стр}} \, d\mathbf{l}) = \int_{-}^{+} (\mathbf{E}^{\text{стр}} \, d\mathbf{l}) = \mathcal{E}_{+-}^{\text{стр}} \quad (4.34'')$$

R – сопротивление всей цепи; $\mathcal{E}^{\text{стр}}$ – э. д. с., действующая в ней; R_i – внутреннее сопротивление источника тока (участка C_{-+}); R_e – сопротивление внешней части цепи тока (участка C_{+-}).

Применяя (4.34) к внешнему участку цепи, имеем

$$U_{+} - U_{-} = I \cdot R_e. \quad (4.35)$$

Подставляя в (4.35) выражение для I из (4.34'), получаем

$$U_{+} - U_{-} = \mathcal{E}^{\text{стр}} \cdot \frac{R_e}{R_i + R_e} = \frac{\mathcal{E}^{\text{стр}}}{1 + \frac{R_i}{R_e}}. \quad (4.35')$$

При $R_i \ll R_e$

$$U_{+} - U_{-} \approx \mathcal{E}^{\text{стр}}, \quad \text{т. е. } \mathcal{E}_{+-} \approx -\mathcal{E}^{\text{стр}}. \quad (4.36)$$

Для случая $R_e = \infty$ (когда цепь разомкнута) в формулах (4.36) знаки приближённого равенства должны быть заменены знаками равенства. В этом случае согласно (4.34') ток $I=0$ и стороннее напряжение $\mathcal{E}^{\text{стр}}$ только уравнивает электрическое напряжение \mathcal{E}_{+-} между сечениями S^{+} и S^{-} (рис. 4.15, а) цепи тока (между полюсами источника тока).

IV. Контактные э. д. с.

Формулы (4.36) справедливы, в частности, для пространственной цепи с контактной э. д. с. на некоторой поверхности S_{12} (например, с диффузионной э. д. с. на контакте пород, насыщенных растворами NaCl различной концентрации), так как в такой цепи внутренняя часть (тонкий слой у сечения S_{12}) имеет очень малую (микроскопическую) толщину h и, следовательно, сопротивление R_i внутреннего участка цепи электрического тока очень мало.

Считая $h \rightarrow 0$, мы должны положить $R_i \rightarrow 0$. Обозначая индексами 1 и 2 величины, относящиеся к областям V_1 и V_2 , разделяемым поверхностью S_{12} , получаем, согласно (4.36),

$$U^{(2)} - U^{(1)} = \mathcal{E}_{12}^{\text{кнт}}, \quad \text{т. е.} \quad \mathcal{E}_{12} = -\mathcal{E}_{12}^{\text{кнт}}. \quad (4.37)$$

Согласно (4.37) на поверхности S_{12} , на которой действуют контактные э. д. с., потенциал U терпит разрыв. Но в § 7 главы второй было установлено, что потенциал терпит (конечный по величине) разрыв только на такой поверхности S , на которой есть двойной слой. Следовательно, на поверхности S_{12} , на которой действуют контактные э. д. с., должен быть двойной электрический слой. Сравнивая (4.37) с (2.82), мы видим, что этот двойной слой должен иметь поверхностную плотность дипольных моментов

$$\eta_{12} = \varepsilon_0 \cdot \mathcal{E}_{12}^{\text{кнт}}. \quad (4.37')$$

С другой стороны, если на поверхности S_{12} находится двойной слой и, следовательно, она является поверхностью разрыва потенциала U , то при удельной электропроводности $\gamma > 0$ согласно (4.37) на ней должны существовать контактные э. д. с. Это вполне понятно, так как силы поля \mathbf{E} стремятся соединить обкладки двойного слоя, нейтрализовать его заряды и, следовательно, если в зазоре между обкладками среда – проводящая, то для сохранности двойного слоя необходимо, чтобы в этом зазоре силам поля \mathbf{E} противодействовали силы поля $\mathbf{E}^{\text{ср}}$. Согласно (4.37), (2.87), (2.114)₁ и (2.115)₁,

$$E_t^{(2)} - E_t^{(1)} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_{12}^{\text{кнт}}, \quad \left[\mathbf{n} \left(\mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)} \right) \right] = -\left[\mathbf{n} \text{ grad}^S \mathcal{E}_{12}^{\text{кнт}} \right],$$

$$\frac{\partial U^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial U^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_{12}^{\text{кнт}}, \quad (4.38)$$

где в соответствии с (1.41) grad^S – двумерный градиент.

Равенство (4.38)₃ можно получить, дифференцируя равенство (4.37)₁ по тангенциальному направлению t .

На поверхности S_{12} , на которой нет контактной э. д. с., неоднородной по направлению t ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_{12}^{\text{кнт}} = 0, \quad E_t^{(2)} = E_t^{(1)}, \quad \rho_2 \cdot j_t^{(2)} = \rho_1 \cdot j_t^{(1)}, \quad \frac{\partial U^{(2)}}{\partial t} = \frac{\partial U^{(1)}}{\partial t}, \quad (4.38')$$

а если на этой поверхности нет никакой контактной э. д. с., то на ней потенциал U непрерывен:

$$\text{при } \mathcal{E}_{12}^{\text{кнт}} = 0 \quad U^{(2)} = U^{(1)}. \quad (4.38'')$$

V. Закон Джоуля – Ленца

При перемещении электричества в проводнике под действием поля $\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ср}}$ в этом проводнике выделяется количество тепла, равное работе, производимой полем. При перемещении заряда e сила $e \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ср}})$ производит на пути dl работу $e \cdot ([\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ср}}] \mathbf{dl})$. Через сечение цепи тока за время dt проходит заряд $I \cdot dt$, поэтому на участке цепи S_{12} , т. е. на пути l_{12} между его границами S_1 и S_2 за это время

совершается работа

$$I \cdot dt \cdot \int_1^2 (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}}) \cdot d\mathbf{l} = I \cdot dt \cdot (\mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_{12}^{\text{стр}}) = I \cdot dt \cdot (U_1 - U_2 + \mathcal{E}_{12}^{\text{стр}}).$$

Обозначая через Q_{12} количество тепла, выделяющееся на этом участке в единицу времени t , и принимая во внимание (4.34), имеем

$$Q_{12} = I \cdot \int_1^2 (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}}) \cdot d\mathbf{l} = I \cdot (\mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_{12}^{\text{стр}}) = \frac{(\mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_{12}^{\text{стр}})^2}{R_{12}} = I^2 \cdot R_{12}. \quad (4.39)$$

Эта формула выражает закон Джоуля – Ленца.

Стороннее поле на этом же участке производит в единицу времени работу

$$P_{12} = I \cdot \int_1^2 (\mathbf{E}^{\text{стр}}) \cdot d\mathbf{l} = I \cdot \mathcal{E}_{12}^{\text{стр}}. \quad (4.40)$$

Если участок C_{12} находится во внешней части цепи тока, то

$$P_{12} = 0, \quad Q_{12} = I \cdot \mathcal{E}_{12} = \frac{\mathcal{E}_{12}^2}{R_{12}} = I^2 \cdot R_{12}. \quad (4.41)$$

Согласно принятому условию путь l_{12} направлен по току I , т. е. ток направлен от S_1 к S_2 . Поэтому во внутренней части цепи $(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}}) \cdot d\mathbf{l} = (E_l + E_l^{\text{стр}}) \cdot dl = (E^{\text{стр}} - E) \cdot dl$, причём $E^{\text{стр}} > E$, $E^{\text{стр}} - E < E^{\text{стр}}$ и, следовательно, $P_{12} > Q_{12}$.

Во всей внутренней части цепи электрического тока выделяется количество тепла

$$Q_i = I \cdot \int_{-}^{+} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}}) \cdot d\mathbf{l} = I \cdot (\mathcal{E}_{+-} + \mathcal{E}^{\text{стр}}) = I \cdot (\mathcal{E}^{\text{стр}} - U_+ + U_-) = I^2 \cdot R_i, \quad (4.42)$$

во внешней части

$$Q_e = I \cdot \int_{+}^{-} (\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} = I \cdot \mathcal{E}_{+-} = I \cdot (U_+ - U_-) = I^2 \cdot R_e, \quad (4.42')$$

а во всей цепи (принимая во внимание, что $\oint (\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} = 0$)

$$\begin{aligned} Q^0 &= I \cdot \oint (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стр}}) \cdot d\mathbf{l} = I \cdot \oint (\mathbf{E}^{\text{стр}}) \cdot d\mathbf{l} = I \cdot \mathcal{E}^{\text{стр}} = I^2 \cdot R = \frac{(\mathcal{E}^{\text{стр}})^2}{R} = \\ &= I^2 \cdot (R_i + R_e) = Q_i + Q_e. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Работа стороннего поля во внутренней части цепи электрического тока – сторонняя энергия:

$$P_i = I \cdot \int_{-}^{+} (\mathbf{E}^{\text{стр}}) \cdot d\mathbf{l} = I \cdot \mathcal{E}_{-+}^{\text{стр}} = I \cdot \mathcal{E}^{\text{стр}} = Q^0. \quad (4.43')$$

Следовательно, сторонняя энергия равна количеству тепла Q^0 , выделяющегося во всей цепи. Только часть сторонней энергии, равная Q_i , выделяется в виде тепла во внутренней части цепи, т. е. на месте работы стороннего поля. Остальная часть этой энергии, равная $Q^0 - Q_i = Q_e$, выделяется в виде тепла во внешней части цепи. Очевидно, что эта часть энергии в каком-то

виде должна по какому-то пути транспортироваться из места, где расходуется сторонняя энергия, к месту, где получается соответствующая ей тепловая энергия, т. е. от внутренней части цепи к её внешней части. Об этом будет идти речь в главе шестой.

В проводящей среде электрическому полю сопутствует явление электрического тока, сопряжённое с работой электрического поля с расходом энергии этого поля, с её переходом в тепло. Следствием этой потери электрической энергии $W_{эл}$ (при отсутствии источника тока) является уменьшение её плотности $dW_{эл}/dV$ и поэтому также напряжённости поля E , квадрату абсолютной величины которой, согласно (3.60'), пропорциональна плотность электрической энергии. Работа стороннего поля компенсирует эту потерю. За счёт сторонней (например, химической) энергии электрическая энергия непрерывно восполняется, в результате чего плотность электрической энергии и, следовательно, напряжённость электрического поля сохраняются.

Из токовой трубки с поперечным сечением dS выделим отрезок длиной dl и объёмом $dV=(dS dl)$. В этом элементе объёма за время dt совершается работа

$$(\mathbf{j} d\mathbf{S}) \cdot ([\mathbf{E} + \mathbf{E}^{стр}] d\mathbf{l}) \cdot dt, \quad (4.44)$$

следовательно, в нём в единицу времени выделяется количество тепла

$$dQ = (\mathbf{j} [\mathbf{E} + \mathbf{E}^{стр}]) \cdot (d\mathbf{S} d\mathbf{l}) = (\mathbf{j} [\mathbf{E} + \mathbf{E}^{стр}]) \cdot dV. \quad (4.44')$$

В том же элементе объёма в единицу времени стороннее поле производит работу $dP = (\mathbf{j} \mathbf{E}^{стр}) \cdot dV$. Таким образом, в единице объёма проводника за единицу времени совершается работа сторонних сил и выделяется тепло, количества которых определяют формулы

$$\frac{dP}{dV} = (\mathbf{j} \mathbf{E}^{стр}), \quad \frac{dQ}{dV} = (\mathbf{j} [\mathbf{E} + \mathbf{E}^{стр}]) = \frac{(E + E^{стр})^2}{\rho} = \rho \cdot j^2. \quad (4.45)$$

В частности, для элемента dV внешней части цепи электрического тока имеем

$$\frac{dP}{dV} = 0, \quad \frac{dQ}{dV} = (\mathbf{j} \mathbf{E}) = \frac{E^2}{\rho} = \rho \cdot j^2. \quad (4.46)$$

Во внутренней части цепи $\frac{dP}{dV} > \frac{dQ}{dV}$, так как $\mathbf{j} [\mathbf{E} + \mathbf{E}^{стр}] = j \cdot (E^{стр} - E) < j \cdot E^{стр}$.

Разность $\frac{dP}{dV} - \frac{dQ}{dV}$ в этой части цепи представляет собой часть сторонней энергии (ежесекундно расходуемой в единице объёма), не выделяющуюся в этой же единице объёма в виде тепла.

Формула (4.45)₂ выражает закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме.

§ 4. ИСТОЧНИКИ СТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Необходимость сторонних сил для сохранения поля E в проводящей среде не противоречит тому, что это поле (как и электростатическое поле E) создают

электрические заряды. Но напряжённость поля, порождаемого всеми не меняющимися со временем зарядами (свободными и связанными), находящимися вне области, занятой токовым кольцом, равна нулю в теле этого кольца (в занимаемой им области) так же, как в любом другом проводнике, находящемся в электростатическом поле. Поле в токовом кольце обращается в нуль при удалении из него сторонних сил, оно (как будет доказано в § 7 и как подтверждает опыт) не меняется при любых изменениях среды и зарядов вне области, занятой кольцом. Таким образом, источники постоянного поля \mathbf{E} в токовом кольце могут находиться только внутри него и на его поверхности. Но из этих источников нет смысла выделять свободные заряды, так как они, как и связанные заряды, зависят от поля \mathbf{E} . Сопоставив уравнения (4.33)₁ и (4.21)_{II}, получим выражение для объёмной плотности $\delta_{\text{плн}}$ полных зарядов через γ и $\mathbf{E}^{\text{ср}}$, не содержащее ε . Изменение диэлектрической проницаемости ε (при заданных величинах γ и $\mathbf{E}^{\text{ср}}$) может влиять только на соотношение между свободными и полными зарядами, но не на полные источники поля \mathbf{E} (см. раздел V § 8). В связи с этим при расчёте стационарного поля по заданным функциям γ и $\mathbf{E}^{\text{ср}}$ (э. д. с.) можно полагать $\varepsilon=1$, $\mathbf{D}=\varepsilon_0 \cdot \mathbf{E}$, $\mathbf{P}=0$, $\delta_{\text{свз}}=0$, $\sigma_{\text{свз}}=0$, $e_{\text{свз}}=0$. Но проще оставить неопределёнными эти величины и не разделять источники поля \mathbf{E} на свободные и связанные. Поэтому, не применяя индекса «плн», будем впредь (как правило) иметь в виду полные заряды, которые, однако, можно (и иногда будем) считать свободными, полагая, что $\varepsilon=1$.

I. Плотности источников поля \mathbf{E}

В соответствии с (4.21)_{II} имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \delta / \varepsilon_0, \quad \operatorname{Div} \mathbf{E} = \sigma / \varepsilon_0, \quad \oint_{S[V]} (\mathbf{E} \, d\mathbf{S}) = \frac{e_V}{\varepsilon_0}, \quad (4.47)$$

где δ и σ – объёмная и поверхностная плотности полных зарядов; e_V – их количество в какой-либо области V , ограниченной замкнутой поверхностью $S[V]$. Вместе с тем согласно (4.33)_{1,2}

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{(\mathbf{E} \nabla \gamma)}{\gamma} - \frac{\operatorname{div}(\gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{ср}})}{\gamma}, \quad \operatorname{Div} \mathbf{E} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_{\text{ср}}} \cdot E_n^{\text{ср}} - \frac{\operatorname{Div}(\gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{ср}})}{\gamma_{\text{ср}}}, \quad (4.48)$$

где

$$\gamma_{\text{ср}} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \quad \text{и} \quad E_n^{\text{ср}} = \frac{E_n^{(1)} + E_n^{(2)}}{2}$$

– средние из значений, принимаемых величинами γ и E_n у поверхности S (на которой определяется поверхностная дивергенция $\operatorname{Div} \mathbf{E}$) в разделяемых этой поверхностью областях V_1 и V_2 .

В (4.48)₂ принято во внимание, что выражение для $\operatorname{Div}(\gamma \cdot \mathbf{E})$ аналогично (математически идентично) выражению (3.22)₂ для $\operatorname{Div}(\varepsilon \cdot \mathbf{E})$.

При $\gamma=0$ правые части (4.48) принимают неопределённые значения, а уравнения (4.33) обращаются в тождество. Все эти формулы, а также формулы, получаемые с их помощью ниже, применимы только для части пространства, заполненной проводящей средой.

Следовательно,

$$\delta = \delta_{\gamma E} + \delta_{\gamma E_{\text{стр}}}, \quad \sigma = \sigma_{\gamma E} + \sigma_{\gamma E_{\text{стр}}}, \quad e = e_{\gamma E} + e_{\gamma E_{\text{стр}}}, \quad (4.49)$$

где

$$\delta_{\gamma E} = -\frac{\varepsilon_0}{\gamma} \cdot (\mathbf{E} \nabla \gamma), \quad \sigma_{\gamma E} = \varepsilon_0 \cdot \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_{\text{ср}}} \cdot E_n^{\text{ср}} \quad (4.50)$$

– плотности «вторичных» зарядов $e_{\gamma E}$, зависящих от поля \mathbf{E} ;

$$\delta_{\gamma E_{\text{стр}}} = -\frac{\varepsilon_0}{\gamma} \cdot \text{div}(\gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{стр}}), \quad \sigma_{\gamma E_{\text{стр}}} = -\frac{\varepsilon_0}{\gamma_{\text{ср}}} \cdot \text{Div}(\gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{стр}}) \quad (4.51)$$

– плотности «первичных» зарядов $e_{\gamma E_{\text{стр}}}$, не зависящих от поля \mathbf{E} ; δ , σ – плотности «общих» (полных) зарядов (или свободных при $\varepsilon=1$);

$$\gamma_{\text{ср}} = \frac{\rho_{\text{ср}}}{\rho_1 \cdot \rho_2}; \quad \frac{\nabla \gamma}{\gamma} = -\frac{\nabla \rho}{\rho}. \quad (4.52)$$

Во внешней части цепи тока $\delta_{\gamma E_{\text{стр}}}=0$, $\sigma_{\gamma E_{\text{стр}}}=0$, $\mathbf{j}=\gamma \cdot \mathbf{E}$ и, следовательно, $\delta=\delta_{\gamma E}$, $\sigma=\sigma_{\gamma E}$.

Первичные заряды $e_{\gamma E_{\text{стр}}}$ находятся во внутренней, части цепи тока (где поле $\mathbf{E}^{\text{стр}} \neq 0$), и их распределение в ней имеет для нас обычно формальное значение; для характеристики этой части цепи тока обычно вместо $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ и γ_i применяют интегральные величины: напряжение $\mathcal{E}^{\text{стр}}$ и сопротивление R_i . Поверхностные заряды $e_{\gamma E_{\text{стр}}}$, с плотностью $\sigma_{\gamma E_{\text{стр}}}$ согласно (4.51)₂, существуют на поверхностях разрыва нормальной компоненты вектора $\gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{стр}}$ и, в частности, на сечениях S^+ и S^- цепи тока, ограничивающих её внутреннюю часть (на полюсах источника тока, [рис. 4.15, а](#)). В цепи с контактной э. д. с. $\mathcal{E}^{\text{кнт}}$ заряды $e_{\gamma E_{\text{стр}}}$ являются только поверхностными и образуют двойной слой.

Вторичные заряды $e_{\gamma E}$ зависят от поля \mathbf{E} и от удельной электропроводности γ и существуют там, где проводящая среда неоднородна по направлению поля: поверхностные – на не параллельных полю поверхностях разрыва функции γ (на поверхностях раздела) и объёмные – в местах непрерывного изменения удельной электропроводности среды по направлению поля. Заряды $e_{\gamma E}$ положительны, когда по направлению поля \mathbf{E} увеличивается удельное электрическое сопротивление ρ , и отрицательны, когда по этому направлению увеличивается γ .

Если область V заполнена однородной проводящей средой и в этой области стороннего поля нет, то, согласно (4.50), (4.51), в ней также нет электрических зарядов:

$$\delta=0, \quad \sigma=0 \quad \text{при} \quad \mathbf{E}^{\text{стр}}=0 \quad \text{и} \quad \nabla \gamma = \text{grad} \gamma = 0. \quad (4.52')$$

Обозначая

$$\gamma_{12} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2 \cdot \gamma_{\text{ср}}} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{2 \cdot \rho_{\text{ср}}} = \rho_{21} = -\rho_{12}, \quad (4.53)$$

имеем согласно (4.50)₂ в любой части цепи электрического тока

$$\sigma_{\gamma E} = 2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \gamma_{12} \cdot E_n^{\text{cp}}. \quad (4.54)$$

Для внешней части цепи тока $E_n^{\text{cp}} = \rho_{\text{cp}} \cdot j_n$ и, следовательно,

$$\sigma_{\gamma E} = \varepsilon_0 \cdot (\rho_2 - \rho_1) \cdot j_n. \quad (4.54')$$

Множитель

$$\gamma_{12} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) / \left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) \quad (4.54'')$$

– коэффициент контрастности поверхности раздела между проводящими средами аналогичен множителям ε_{12} и μ_{12} , о которых шла речь в § 4 главы третьей. Его также называют коэффициентом отражения. Из (4.54) следует, что этот коэффициент является множителем пропорциональности между делённой на $2 \cdot \varepsilon_0$ плотностью зарядов на поверхности раздела и средним значением нормальной компоненты E_n поля \mathbf{E} на ней. Он зависит от отношения $\gamma_2/\gamma_1 = \rho_1/\rho_2$. При $0 \leq (\gamma_2/\gamma_1) \leq \infty$ и $\infty \geq (\rho_2/\rho_1) \geq 0$ для коэффициента контрастности имеем: $+1 \geq \gamma_{12} \geq -1$, а при $\gamma_2 = \gamma_1$, $\rho_2 = \rho_1$ коэффициент контрастности $\gamma_{12} = 0$.

II. Уравнения плотности источников поля \mathbf{E}

Допустим, что в области V , заполненной однородной средой "1" с удельной электропроводностью γ_1 задано первичное поле $\mathbf{E}^{\text{прв}}$, источники которого предполагают неизменными. Положим, что в области V поле $\mathbf{E}^{\text{срп}} = 0$. Представим себе, что в некоторой части Θ области V среда "1" заменена средой "2" (в общем случае – неоднородной) с удельной электропроводностью γ_2 . Согласно (4.50) в области Θ и на её границе $S[V]$ "возникнут" (будут теперь существовать) заряды $e_{\gamma E}$ с объёмной плотностью $\delta = \delta_{\gamma E}$ и поверхностной плотностью $\sigma = \sigma_{\gamma E}$, которые в соответствии с (2.12), (2.114) создают вторичное поле

$$\mathbf{E}^{\text{втр}}(a) = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \left[\int_{\Theta} \frac{\delta(q)}{L_{qa}^3} \mathbf{L}_{qa} dV + \int_S \frac{\sigma(q)}{L_{qa}^3} \mathbf{L}_{qa} dS \right], \quad (4.55)$$

где S – граница $S[\Theta]$ и совокупность находящихся в области Θ поверхностей раздела $S_{\alpha\beta}$, у которых величина γ меняется скачкообразно от γ_α до γ_β .

Фактически же действует суммарное поле

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{прв}} + \mathbf{E}^{\text{втр}} \quad (4.56)$$

и оно должно быть подставлено в выражения (4.50) для плотностей зарядов $e_{\gamma E}$. Ниже (до конца этого параграфа) будет идти речь об источниках вторичного поля $\mathbf{E}^{\text{втр}}$, возникающих (точнее – существующих в случае стационарного поля \mathbf{E}) в связи с описанным выше нарушением однородности среды.

Подставляя (4.55), (4.56) в (4.50), можно получить для плотностей δ и σ в любой из точек q выражения через значения этих величин во всех остальных точках q . Таким путем мы приходим к интегральным уравнениям для функций

$\delta(q)$ и $\sigma(q)$.

Рассмотрим случаи, когда поверхностная плотность зарядов (в виде простого слоя) $\sigma=0$, либо объёмная плотность зарядов $\delta=0$. Первый случай имеем, когда внутри области Θ и на её границе $S[\Theta]$ величина γ непрерывна, а второй – когда среда в области Θ однородна или кусочно-однородна.

В первом случае ($\sigma=0$) источниками вторичного поля \mathbf{E}^{BTP} являются только объёмные заряды. Их плотность $\delta(q)$ в точках q и напряжённость их поля $\mathbf{E}^{\text{BTP}}(a)$ в точке a согласно (4.50), (4.55), (4.56) определяют формулы

$$\delta(q) = \frac{-\varepsilon_0}{\gamma(q)} \left\{ \left(\left[\mathbf{E}^{\text{прв}}(q) + \mathbf{E}^{\text{BTP}}(q) \right] \nabla \gamma(q) \right) \right\}, \quad \mathbf{E}^{\text{BTP}}(a) = \int_{\Theta} \frac{\delta(q) \cdot \mathbf{L}_{qa}}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot L_{qa}^3} dV_q, \quad (4.57)$$

в соответствии с которыми имеем для функции $\delta(q)$ (объёмной плотности зарядов) неоднородное интегральное уравнение Фредгольма II-го рода:

$$\delta(p) = \frac{-\varepsilon_0}{\gamma(p)} \left(\mathbf{E}^{\text{прв}}(p) \cdot \nabla \gamma(p) \right) - \frac{1}{4\pi \cdot \gamma(p)} \int_{\Theta} \frac{\delta(q) \cdot (\mathbf{L}_{qp} \cdot \nabla \gamma(p))}{L_{qp}^3} dV_q. \quad (4.58)$$

Во втором случае ($\delta=0$) источниками вторичного поля являются поверхностные заряды с поверхностной плотностью σ , распределённые на поверхностях раздела $S_{\alpha\beta}$ (в области Θ) и, в частности, на поверхности $S[\Theta]$, если на ней удельная электропроводность γ терпит разрыв. Согласно (4.54), (4.55) и (4.56) поверхностную плотность σ зарядов $e_{\gamma E}$ и напряжённость их поля \mathbf{E}^{BTP} определяют формулы

$$\sigma(q) = 2\varepsilon_0 \cdot \gamma_{\alpha\beta}(q) \left[E_n^{\text{прв}}(q) + E_n^{\text{BTP}}(q) \right], \quad \mathbf{E}^{\text{BTP}}(a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma(q) \cdot \mathbf{L}_{qa}}{L_{qa}^3} dS_q, \quad (4.59)$$

где S – совокупность поверхностей $S_{\alpha\beta}$ (включая поверхность $S[\Theta]$).

В соответствии с (4.59) для любой точки p поверхности раздела $S_{\alpha\beta}$ получаем

$$\sigma(p) - \lambda \cdot \int_S K(p, q) \cdot \sigma(q) dS_q = f(p), \quad (4.60)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{2\pi}; \quad K(p, q) = \frac{\gamma_{\alpha\beta}(p)}{L_{qp}^3} \cdot (\mathbf{L}_{qp} \cdot \mathbf{n}_p); \quad f(p) = 2\varepsilon_0 \cdot \gamma_{\alpha\beta} \cdot E_n^{\text{прв}}(p), \quad (4.61)$$

а \mathbf{n}_p - нормаль в точке p поверхности $S_{\alpha\beta}$, направленная от среды с удельной электропроводностью $\gamma=\gamma_\alpha$ к среде, в которой $\gamma=\gamma_\beta$. Интегральное уравнение (4.60) для функции $\sigma(q)$ аналогично уравнению (4.58) для $\delta(q)$. Процесс решения таких уравнений непрост, но он облегчается применением современных компьютеров.

Разбивая поверхность S на площадки ΔS_q , с центрами q и заменяя функцию $\sigma(q)$ совокупностью значений σ в точках q , можно свести равенство (4.60) при каждом положении точки p к линейному алгебраическому уравнению для неизвестных значений функции σ в точках q . Так, уравнение (4.60) сводится к

системе таких уравнений. Другой метод, (итераций) позволяет найти ряд последовательных приближений функции $\sigma(q)$. Подставляя под интеграл в (4.60) $\sigma(q)=0$, получаем $\sigma^{(0)}(p)=f(p)$ – это плотность зарядов, существующих в точке p под действием только первичного поля. Меняя положение точки p , получаем функцию $\sigma^{(0)}(q)$, т. е. функцию $\sigma(q)$ в нулевом приближении. Подставляя функцию $\sigma^{(0)}(q)$ под интеграл вместо $\sigma(q)$, получаем равенство

$$\sigma^{(1)}(p) = \lambda \cdot \int_S K(p, q) \cdot \sigma^{(0)}(q) dS_q + \sigma^{(0)}(p) \quad (4.60')$$

и определяем первое приближение $\sigma^{(1)}(q)$ функции $\sigma(q)$. Оно соответствует влиянию первичного поля и поля зависимых зарядов нулевого приближения. Таким же путем переходим последовательно к приближениям $\sigma^{(2)}(q)$, $\sigma^{(3)}(q)$ и т. д. функции $\sigma(q)$.

Уравнения, аналогичные (4.58) и (4.60), можно получить для плотностей источников статического поля (магнитного, электрического). Уравнение, аналогичное (4.60), можно составить, в частности, для плотности зарядов, индуцированных на поверхности проводника в электростатическом поле. Таким уравнением можно воспользоваться для определения гринновского слоя (см. раздел V, § 7 главы третьей).

III. Заряды на поверхности включения

Допустим, что поверхность $S[\Theta]$ замкнута и нарушение однородности среды сводится к присутствию в ней инородного тела, заполняющего область Θ (рис. 4.16). Будем считать включение однородным эллипсоидом с одной из осей по направлению первичного поля $\mathbf{E}^{\text{прв}}$. Плотность σ зарядов на поверхности включения имеет разные знаки на его передней и тыльной (считая по направлению поля \mathbf{E}) частях. Нормаль n на $S[\Theta]$ направляем, как обычно, от среды 1 к среде 2 (в данном случае внутрь области Θ). При $\gamma_2 < \gamma_1$ (или $\gamma_2 > \gamma_1$) имеем на тыльной части поверхности $S[\Theta]$, где $E_n > 0$, $\sigma > 0$ (или $\sigma < 0$), а на передней её части, где $E_n < 0$, $\sigma < 0$ (или $\sigma > 0$). Таким образом, на поверхности включения находятся два заряда e^+ и e^- с разными знаками. Сумма этих зарядов, очевидно, равна нулю, так как, согласно (4.54') и (4.17)₃

$$e_{\gamma E} = e^+ + e^- = \oint_{S[\Theta]} \sigma dS = \varepsilon_0 \cdot (\rho_2 - \rho_1) \oint_{S[\Theta]} (\mathbf{j} d\mathbf{S}) = 0. \quad (4.62)$$

Распределение зарядов $e = e_{\gamma E}$, существующих под действием стационарного поля \mathbf{E} на поверхности инородного включения в проводящей среде, аналогично распределению зарядов, индуцируемых на поверхности проводника в статическом поле \mathbf{E} , и зарядов $e_{\varepsilon E}$ или масс $m_{\mu H}$, присутствующих на поверхности диэлектрика или магнетика, поляризующегося в поле \mathbf{E} или \mathbf{H} . Заряды $e_{\gamma E}$ (e^+ и e^-), находящиеся на поверхности включения в проводящей среде, иногда называют *индуцированными*, а тело (включение, объект), на котором эти заряды существуют, – *поляризованным*. В случае нескольких включений получается взаимное их влияние,

соответствующее взаимной индукции проводников в электростатическом поле. Формула (4.62) в этом случае справедлива для поверхности каждого включения в отдельности.

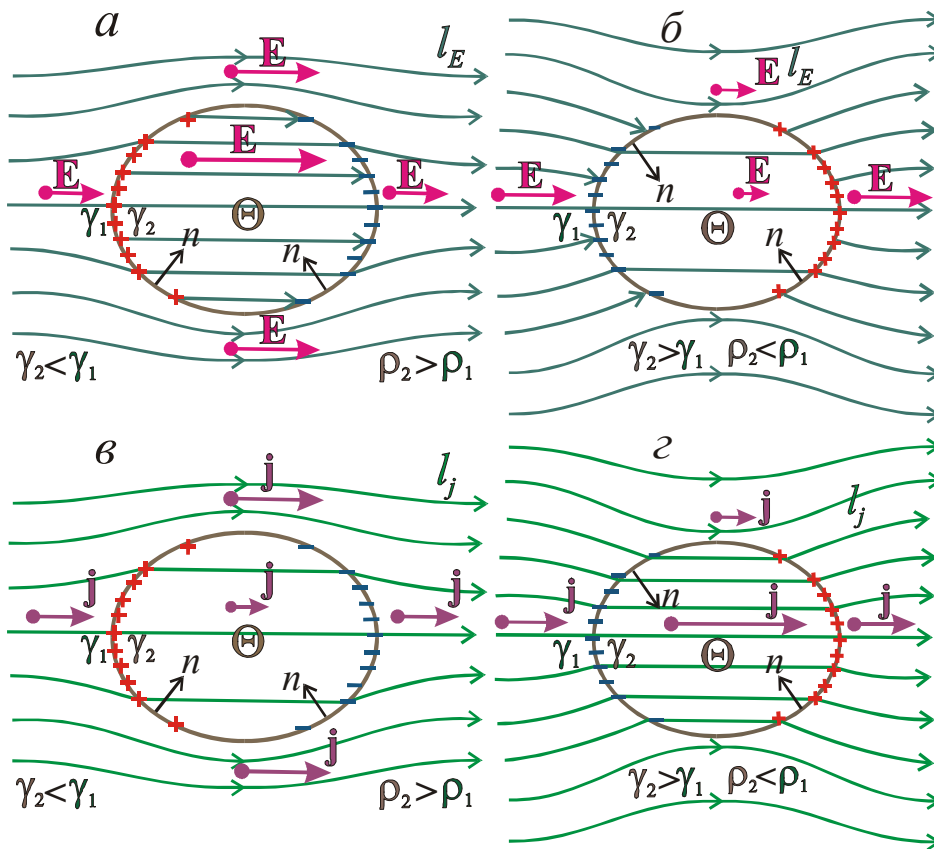


Рис. 4.16.

Инеродное (само по себе однородное) включение (тело) в форме эллипсоида в однородном стационарном электрическом поле.

Значения удельной электропроводности γ внутри включения меньше (а, в) или больше (б, з), чем во вмещающей среде. Векторы \mathbf{E} и силовые линии l_E (а, б); векторы \mathbf{j} и токовые линии l_j (в, з)

Процесс образования заряда $e_{\gamma E}$ на поверхности раздела $S[\Theta]$ схематически может быть представлен в следующем виде.

"Схематически" – потому что без учета свойственных переменному полю явлений, о которых будет идти речь в главе шестой. Для простоты будем здесь полагать $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ и, следовательно, $\sigma_{\text{плн}} = \sigma_{\text{свб}}$.

До замены среды 1 в области Θ средой 2 имеем внутри и вне этой области ток с плотностью $\gamma_1 \cdot \mathbf{E}^{\text{прв}}$. После замены получаем на поверхности $S[\Theta]$ разрыв компоненты j_n вектора \mathbf{j} и, следовательно, накопление заряда e на ней. В первый момент $j_n^{(2)} - j_n^{(1)} = (\gamma_2 - \gamma_1) \cdot E_n^{\text{прв}}(p)$; затем появляется меняющееся вторичное поле, создаваемое накапливающимся зарядом. При этом разрыв

$$j_n^{(2)} - j_n^{(1)} = \gamma_2 \cdot E_n^{(2)}(p) - \gamma_1 \cdot E_n^{(1)}(p), \quad (4.63)$$

где согласно (2.91) – (2.91''')

$$E_n^{(1)}(p) = E_n^{\text{cp}}(p) - \frac{1}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \sigma(p), \quad E_n^{(2)}(p) = E_n^{\text{cp}}(p) + \frac{1}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \sigma(p). \quad (4.63')$$

Подставляя (4.10) и (4.63') в (4.63), получаем для производной по времени t

$$\frac{\partial \sigma(p)}{\partial t} = (\gamma_1 - \gamma_2) \cdot E_n^{\text{cp}}(p) - \frac{1}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot (\gamma_1 + \gamma_2) \cdot \sigma(p). \quad (4.63'')$$

Отсюда при $\frac{\partial \sigma(p)}{\partial t} = 0$, т. е. для установившегося постоянного поля,

получаем уравнения (4.54), (4.59)₁, (4.60).

Пока абсолютная величина $\left| \frac{\partial \sigma(p)}{\partial t} \right| > 0$, величины σ , $\mathbf{E}^{\text{втр}}$, а также фактически действующее (суммарное) поле \mathbf{E} меняются. Постоянство этих величин наступает при $\frac{\partial \sigma(p)}{\partial t} = 0$, когда исчезает разрыв компоненты j_n , а величина $|\sigma|$,

увеличиваясь, достигает некоторого асимптотического значения. Для этого она должна замедлять свой рост, из чего следует, что величина $\left| \frac{\partial \sigma(p)}{\partial t} \right|$ должна со

временем уменьшаться. Это вполне понятно, так как компонента $E_n^p(p)$ (см. раздел III, § 7 главы второй) у поверхности $S[\Theta]$ направлена так, что она вызывает увеличение абсолютного значения компоненты $E_n(p)$ и, следовательно, также компоненты $j_n(p) = \gamma \cdot E_n(p)$ в среде с меньшей удельной электропроводностью γ и уменьшение этих величин в среде с большей удельной электропроводностью. Когда $\sigma(p)$ достигает значения, обращающего в нуль правую часть (4.63''), получаем $\partial \sigma(p) / \partial t = 0$ и, следовательно, значение $\sigma(p)$ перестаёт меняться со временем и вместе с ним перестаёт меняться поле \mathbf{E} .

§ 5. ВЛИЯНИЕ НАРУШЕНИЙ ОДНОРОДНОСТИ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ

Неоднородности среды, являющиеся (как показано выше) носителями источников поля \mathbf{E} , очевидно, влияют на поля векторов \mathbf{E} и \mathbf{j} . Будем рассматривать поведение этих полей у разрывных нарушений однородности проводящей среды.

I. Поверхность раздела

Рассмотрим поле у поверхности раздела между средами с различными удельными электрическими сопротивлениями $\rho = 1/\gamma$. Допустим, что эта поверхность находится во внешней части цепи тока и что на ней нет поверхностных токов. Поведение векторов \mathbf{E} и \mathbf{j} у такой поверхности определяют формулы (4.18'), (4.38'), согласно которым на ней тангенциальная компонента вектора \mathbf{E} и нормальная компонента вектора \mathbf{j} непрерывны, а нормальная компонента вектора \mathbf{E} и тангенциальная компонента вектора \mathbf{j} терпят разрывы, причём нормальная компонента E_n меняется пропорционально

удельному электрическому сопротивлению среды ρ , а тангенциальная компонента j_t – пропорционально удельной электропроводности среды γ :

$$\frac{E_t^{(2)}}{E_t^{(1)}} = 1, \quad \frac{E_n^{(2)}}{E_n^{(1)}} = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \frac{j_t^{(2)}}{j_t^{(1)}} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \quad \frac{j_n^{(2)}}{j_n^{(1)}} = 1. \quad (4.64)$$

Разрыв, нормальной компоненты E_n вектора \mathbf{E} "появляется" на поверхности раздела потому, что на ней согласно (4.54) находится поверхностный заряд $e_{\gamma E}$ с плотностью $\sigma_{\gamma E} = 2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \gamma_{12} \cdot E_n^{\text{cp}}$. Из (2.91), (2.114)₁, (2.116)₄ получаем $E_n^{(2)} - E_n^{(1)} = \sigma / \varepsilon_0$. Отсюда следует, что разрыв

$$E_n^{(2)} - E_n^{(1)} = 2 \cdot \gamma_{12} \cdot E_n^{\text{cp}}, \quad (4.65)$$

зависит от контрастности поверхности раздела и от нормальной компоненты E_n поля \mathbf{E} на ней. Относительную величину этого разрыва, т. е. отношение $E_n^{(2)} - E_n^{(1)}$ к E_n^{cp} , полностью определяет коэффициент контрастности γ_{12} этой поверхности.

Разрыв тангенциальной компоненты вектора плотности тока

$$j_t^{(2)} - j_t^{(1)} = (\gamma_2 - \gamma_1) \cdot E_t \quad (4.65')$$

соответствует вихревому характеру поля \mathbf{j} . На поверхности раздела, согласно (4.97")₂, имеем поверхностный вихрь. Вихревые линии, вокруг которых циркуляция вектора \mathbf{j} не обращается в нуль, лежат на этой поверхности и нормальны к направлению полной тангенциальной компоненты \mathbf{j}_τ поля \mathbf{j} .

Направление поля (\mathbf{E}, \mathbf{j}) у поверхности раздела S , (рис. 4.17, а, б) определяем углом α отклонения поля от нормали n к поверхности S .

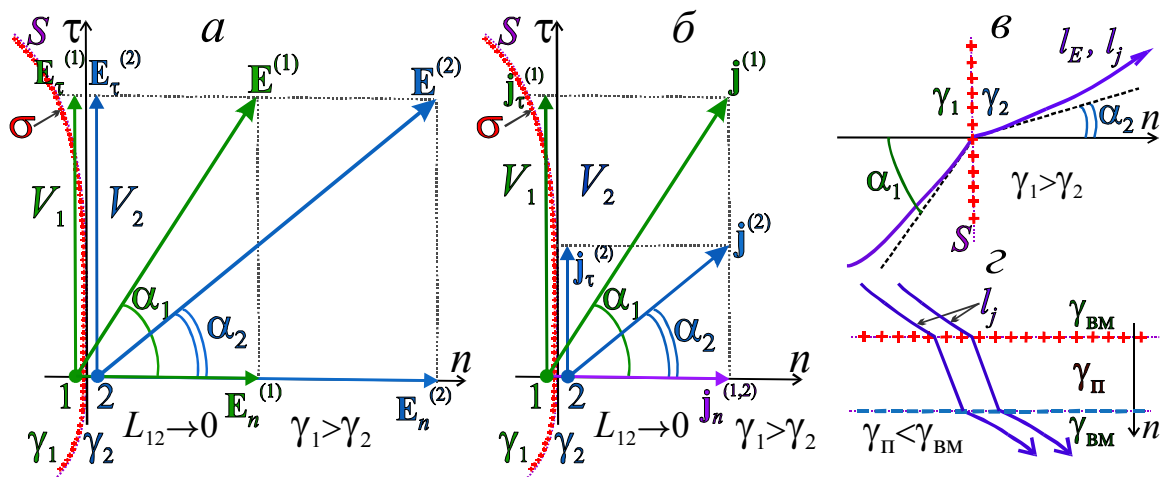


Рис. 4.17.

Векторы \mathbf{E} (а) и \mathbf{j} (б) у границы S сред с удельными электропроводностями γ_1 и γ_2 при $\gamma_1 > \gamma_2$; преломление силовых и токовых линий на границе S (в); преломление токовых линий l_j , "проходящих" слой (пласт) при $\gamma_{\text{П}} < \gamma_{\text{ВМ}}$ (з).

На этих рисунках $\sigma = \sigma_{\text{плн}}$

В изотропной среде направления полей \mathbf{E} и \mathbf{j} – одинаковы, и достаточно рассмотреть одно из них. Очевидно, что $\text{tg } \alpha = E_\tau / E_n$, поэтому в областях V_1 и V_2 у поверхности S

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = E_\tau^{(1)} / E_n^{(1)}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = E_\tau^{(2)} / E_n^{(2)}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 / \operatorname{tg} \alpha_1 = E_\tau^{(2)} \cdot E_n^{(1)} / E_n^{(2)} \cdot E_\tau^{(1)}. \quad (4.66)$$

Следовательно, согласно (4.64)_{1,2}

$$\operatorname{tg} \alpha_2 / \operatorname{tg} \alpha_1 = \gamma_2 / \gamma_1. \quad (4.66')$$

То же получим согласно (4.64)_{3,4}, если будем исходить из формулы $\operatorname{tg} \alpha = j_\tau / j_n$.

Из (4.66') видно, что силовые (l_E) и токовые (l_j) линии преломляются на поверхности раздела, причём тангенс угла α , образуемого ими с нормалью n к этой поверхности, принимает с обеих её сторон значения, пропорциональные удельной электропроводности γ среды. Они "поворачиваются" к нормали в среде с большим удельным сопротивлением ρ , как бы стремясь сократить путь в этой ("плохопроводящей") среде (рис. 4.17, з, рис. 4.18, а). Фактически же, конечно, такое преломление линий l_E , а, следовательно, и l_j обусловлено влиянием поля индуцированных на границах зарядов на суммарное поле E .

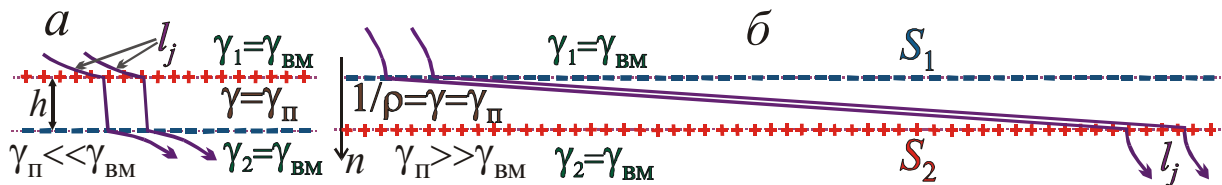


Рис. 4.18.

Преломление токовых и силовых линий, "проходящих" слой (пласт) при $\gamma_{\Pi} \ll \gamma_{\text{ВМ}}$ (а) и $\gamma_{\Pi} \gg \gamma_{\text{ВМ}}$ (б)

Если при конечных (ненулевых и не бесконечно – больших) значениях γ_1 и γ_2 один из углов α_1 и α_2 имеет значение 0 или $\pi/2$, то другой, согласно (4.66'), принимает то же значение. В этих случаях на поверхности раздела силовые и токовые линии не преломляются. Однако при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ абсолютная величина вектора E терпит разрыв, а при $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$ терпит разрыв абсолютная величина вектора j .

Уделим внимание двум предельным случаям: $\gamma_2 / \gamma_1 = 0$, $\rho_2 / \rho_1 = 0$. Будем считать, что знаменатели имеют конечные значения и что в первом случае $\gamma_2 = 0$ (в области V_2 – изолятор), а во втором $\rho_2 = 0$ (в области V_2 – идеальный проводник).

II. Граница проводящей среды

В первом предельном случае идёт речь о поверхности раздела между токовым кольцом (где плотность электрического тока $j \neq 0$) и соприкасающейся с ним непроводящей средой (либо вакуумом) в области V_2 . В случае стационарного электрического тока в земле такой является, например, поверхность раздела земля – воздух.

Очевидно, что

$$\text{при } \gamma_2 = 0 \text{ имеем } j^{(2)} = \gamma_2 \cdot E^{(2)} = 0, \text{ т. е. } j_n^{(2)} = 0, j_t^{(2)} = 0. \quad (4.67).$$

В силу непрерывности компоненты j_n имеем также $j_n^{(1)} = 0$ и, следовательно, $E_n^{(1)} = \rho_1 \cdot j_n = 0$. Таким образом, у границы с изолятором в проводящей среде

векторы \mathbf{j} и \mathbf{E} направлены по тангенциальному направлению τ к его поверхности S (рис. 4.19, а):

$$j_n^{(1)}=0, E_n^{(1)}=0, \mathbf{j}^{(1)}=\mathbf{j}_\tau^{(1)}, \mathbf{E}^{(1)}=\mathbf{E}_\tau^{(1)}, \operatorname{tg} \alpha_1=j_\tau^{(1)}/j_n^{(1)}=\infty, \alpha_1=\pi/2. \quad (4.68)$$

Токовые (l_j) и силовые (l_E) линии огибают поверхность изолятора. В непроводящей среде у поверхности её соприкосновения с проводящей средой, согласно (4.67), $E_n^{(2)}=\rho_2 \cdot j_n^{(2)}=\infty \cdot 0$, и любая тангенциальная компонента $E_t^{(2)}=\rho_2 \cdot j_t^{(2)}=\infty \cdot 0$. Но компонента E_t непрерывна на поверхности раздела. Поэтому

$$E_t^{(2)}=E_t^{(1)}=\rho_1 \cdot j_t^{(1)}. \quad (4.67')$$

Что же касается компоненты $E_n^{(2)}$, то она остаётся неопределённой и вместе с ней оказываются неопределёнными угол $\alpha_2=\operatorname{arctg}(E_\tau^{(2)}/E_n^{(2)})$ и плотность зарядов на поверхности токового кольца:

$$\sigma_{\text{плн}}=\varepsilon_0 \cdot (E_n^{(2)}-E_n^{(1)})=\varepsilon_0 \cdot E_n^{(2)} \quad (\sigma_{\text{плн}}=\sigma_{\text{свб}}+\sigma_{\text{свз}}). \quad (4.69)$$

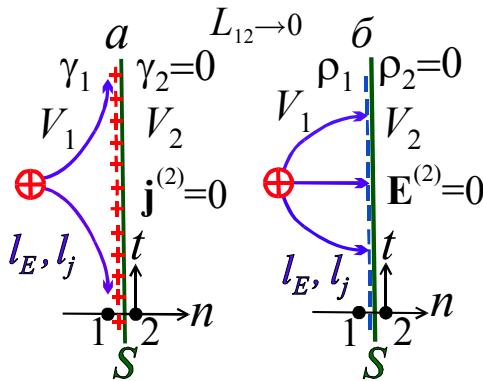


Рис. 4.19.

Стационарное электрическое поле у границы S с изолятором (а) и у границы S с идеальным проводником (б)

Таким образом, нормальная компонента $E_n^{(2)}$ и плотность зарядов $\sigma_{\text{плн}}$ на поверхности токового кольца не определяются полем $\mathbf{E}^{(1)}$, $\mathbf{j}^{(1)}$ внутри этого кольца. Это вполне понятно, так как поле $\mathbf{E}^{(1)}$ не зависит от зарядов, находящихся вне токового кольца (см. замечание 9 в § 7). А между тем поле этих зарядов индуцирует на поверхности кольца (так же, как на поверхности любого другого проводника) заряды $e_{\text{инд}}$ с некоторой плотностью $\sigma_{\text{инд}}$; оно имеет на внешней стороне этой поверхности нормальную компоненту, равную $\sigma_{\text{инд}}/\varepsilon_0$ и в общем случае отличную от нуля.

Кроме того, токовое кольцо, как и любой другой проводник, можно зарядить, наложив на его поверхность заряд $e_{\text{сбс}}$ с плотностью $\sigma_{\text{сбс}}$, который создаёт вне кольца поле с нормальной компонентой, равной $\sigma_{\text{сбс}}/\varepsilon_0$, на внешней стороне поверхности кольца. Вместе со свободными зарядами на этой поверхности существуют также связанные заряды.

Но, кроме всех этих «статических», не связанных с полем $\mathbf{E}^{(1)}$ в токовом кольце зарядов $e_{\text{стат}}$ с плотностью $\sigma_{\text{стат}}$, которым соответствует нормальная компонента $E_n^{(2)\text{стат}}$, мы в общем случае имеем на поверхности кольца ещё другие заряды $e_{\text{стац}}$ с плотностью $\sigma_{\text{стац}}$, которым соответствует компонента $E_n^{(2)\text{стац}}$, связанная с полем $\mathbf{E}^{(1)}$ в токовом кольце. Поэтому суммарная плотность σ и компонента $E_n^{(2)}$ суммарного поля $\mathbf{E}^{(2)}$

$$\sigma_{\text{сумм}}=\sigma_{\text{стат}}+\sigma_{\text{стац}}, \quad E_n^{(2)}=E_n^{(2)\text{стат}}+E_n^{(2)\text{стац}}. \quad (4.69')$$

Поле $\mathbf{E}^{(2)\text{стац}}$ образуют те же источники, которые создают поле $\mathbf{E}^{(1)}$ в токовом кольце. Оно исчезло бы вместе, с полем $\mathbf{E}^{(1)}$, если бы мы убрали из токового кольца поле $\mathbf{E}^{\text{стр}}$ и таким способом обесточили бы это кольцо.

Поле $\mathbf{E}^{(2)\text{стац}}$ в пространстве, окружающем токовое кольцо, зависит от диэлектрической

проницаемости ε среды. В (4.71) этот параметр не содержится, потому что в соответствии со сказанным во вступлении § 4 здесь имеется в виду полная плотность: $\sigma_{\text{плн}} = \sigma_{\text{свб}} + \sigma_{\text{свз}}$.

Согласно (3.51)₁ у поверхности токового кольца тангенциальная компонента $E_t^{(2)\text{стат}} = 0$ и, следовательно, $E_t^{(2)} = E_t^{(2)\text{стат}}$, поэтому компоненту $E_t^{(2)}$ полностью определяет поле $\mathbf{E}^{(1)}$, как это и видно из (4.67'). Что же касается компоненты $E_n^{(2)}$ и плотности зарядов $\sigma_{\text{плн}} = \varepsilon_0 \cdot E_n^{(2)}$, то полностью эти величины не могут определяться полем $\mathbf{E}^{(1)}$ из-за их слагаемых $E_n^{\text{стат}}$ и $\sigma_{\text{стат}} = \varepsilon_0 \cdot E_n^{(2)\text{стат}}$, не связанных с полем $\mathbf{E}^{(1)}$, но отличных в общем случае от нуля. Однако слагаемые $E_n^{(2)\text{стат}}$ и $\sigma_{\text{стат}} = \varepsilon_0 \cdot E_n^{(2)\text{стат}}$ определяются этим полем. Пусть $\sigma_{\text{стат}}(p)$ – значение $\sigma_{\text{стат}}$ в какой-либо точке p поверхности S токового кольца. Тогда у этой точки в соответствии с (2.91'), (2.114)₁

$$E_n^{(1)\text{стат}}(p) = E_n^{\text{стат}*}(p) - \frac{\sigma_{\text{стат}}(p)}{2\varepsilon_0}, \quad E_n^{(2)\text{стат}}(p) = E_n^{\text{стат}*}(p) + \frac{\sigma_{\text{стат}}(p)}{2\varepsilon_0}; \quad (4.70)$$

через $E_n^{\text{стат}*}$ обозначаем поле, порождаемое всеми зарядами, создающими поле $E_n^{\text{стат}}$, кроме заряда $\sigma_{\text{стат}} \cdot dS$ элемента dS поверхности S , содержащего точку p . Но компонента $E_n^{(1)\text{стат}} = 0$, поэтому из (4.70)₁ получаем $E_n^{\text{стат}*}(p) = \sigma_{\text{стат}} / (2 \cdot \varepsilon_0)$ и, следовательно, согласно (4.70)₂,

$$E_n^{(2)\text{стат}}(p) = 2 \cdot E_n^{\text{стат}*}(p) = \frac{\sigma_{\text{стат}}(p)}{\varepsilon_0}.$$

В дальнейшем при изучении стационарного электрического поля мы исключим из рассмотрения поле $\mathbf{E}^{(2)\text{стат}}$ и его источники и будем опускать индекс «стат» в обозначениях поля $\mathbf{E}^{(2)\text{стат}}$ и его источников. Таким образом, имеем

$$E_n^{(2)} = 2 \cdot E_n^*, \quad \sigma = 2 \cdot \varepsilon_0 \cdot E_n^* = \varepsilon_0 \cdot E_n^{(2)}, \quad (4.71)$$

где E_n^* – нормальная компонента поля \mathbf{E} на самой поверхности токового кольца, т. е. в точке, принадлежащей этой поверхности, а не областям V_1 и V_2 , разделяемым ею, а $E_n^{(2)}$ – эта же компонента на внешней стороне поверхности токового кольца.

III. Идеальный проводник

Во втором из указанных выше предельных случаев речь идёт о поверхности раздела между обычной проводящей средой (с умеренными удельной электропроводностью γ и удельным электрическим сопротивлением ρ) и идеальным проводником, т. е. проводником, в котором при $j > 0$ имеем $E = \rho \cdot j = 0$, $\text{grad } U = 0$, так как его удельное электрическое сопротивление $\rho = 0$.

Нулевым удельное сопротивление ρ при обычных условиях не бывает, но в разведочной геофизике удобно пользоваться понятием идеального проводника с удельным сопротивлением, стремящимся к нулю. Действительно, пусть средой 2 является металл (металлический электрод, стальная обсадная труба) или металлически проводящая руда (пирит, халькопирит), а средой 1 – обычная горная порода, состоящая из непроводящих минералов и проводящая электричество только благодаря электролитической проводимости воды,

заполняющей её поры. В таком случае отношение $\rho_2/\rho_1=\rho_2\cdot\gamma_1$ имеет чрезвычайно малое значение. Представим себе поверхность раздела S между двумя такими средами, поперечную токовым линиям l_j . Плотности тока j должны быть в обеих средах одинакового порядка, т. е. величины произведений $\gamma_1\cdot E^{(1)}$ и $\gamma_2\cdot E^{(2)}$ должны иметь значения одинакового порядка. Следовательно, величина $E^{(2)}$ будет иметь значения порядка $E^{(1)}\cdot\rho_2\cdot\gamma_1$, т. е. столь, малые сравнительно с величиной $E^{(1)}$, что при помощи аппаратуры, применимой для наблюдения (измерения характеристик) поля $\mathbf{E}^{(1)}$, мы не заметим поля $\mathbf{E}^{(2)}$ (напряжений между различными точками в среде 2).

Возвращаясь к случаю произвольно расположенной поверхности раздела между обычно ("умеренно") проводящей средой 1 и идеально проводящей средой 2, имеем $\rho_2=0$ и, следовательно, $\mathbf{E}^{(2)}=\rho_2\cdot\mathbf{j}^{(2)}=0$, т. е.

$$E_n^{(2)}=0, \quad E_t^{(2)}=0. \quad (4.72)$$

В силу непрерывности компоненты E_t на S имеем также $E_t^{(1)}=0$ и, следовательно, $j_t^{(1)}=\gamma_1\cdot E_t^{(1)}=0$. Таким образом, у идеального проводника в обычно (умеренно) проводящей среде векторы \mathbf{j} и \mathbf{E} (токовые и силовые линии) нормальны к его поверхности (рис. 4.19, б):

$$E_t^{(1)}=0, \quad j_t^{(1)}=0, \quad \mathbf{E}^{(1)}=\mathbf{E}_n^{(1)}, \quad \mathbf{j}^{(1)}=\mathbf{j}_n^{(1)}, \quad \operatorname{tg} \alpha_1=E_\tau^{(1)}/E_n^{(1)}=0, \quad \alpha_1=0. \quad (4.73)$$

На поверхности идеального проводника находится заряд с плотностью

$$\sigma=\sigma_{\text{плн}}=\varepsilon_0\cdot(\rho_2-\rho_1)\cdot j_n=-\varepsilon_0\cdot\rho_1\cdot j_n=-\varepsilon_0\cdot E_n^{(1)}, \quad (4.74)$$

где нормаль n направлена от области 1 к области 2, т. е. внутрь идеального проводника.

IV. Тонкие слои

Представим теперь нарушение однородности среды в виде совокупности двух поверхностей раздела S_1 и S_2 , ограничивающих тонкий слой толщиной h с удельной электропроводностью γ , расположенный между средами 1 и 2 с удельными электропроводностями γ_1 и γ_2 (см. рис. 4.18). Такими поверхностями раздела могут быть, например, подошва и кровля тонкого пласта или внутренняя и внешняя стороны обсадной трубы в скважине. Силовая линия l_E , проходящая через слой, претерпевает последовательно два преломления. Связанное с этим (преломляющее) влияние слоя при малой его толщине становится незаметным на достаточных расстояниях от него. Если $\gamma_1=\gamma_2$, то в первично-однородном поле силовые линии претерпевают на плоскопараллельном слое только смещение, пропорциональное его толщине. Преломляющее влияние слоя вовсе отпадает, когда поле нормально или параллельно его поверхностям.

Однако влияние слоя, как увидим ниже, даже при очень малой его толщине h может быть значительным при некоторых условиях. Рассмотрим напряжение \mathcal{E}_{12} на толщине слоя и ток dI через элемент длины dl его поперечного сечения, нормального к полной тангенциальной компоненте \mathbf{j}_τ плотности тока в нём. Нетрудно видеть, что напряжение

$$\mathcal{E}_{12}=h\cdot E_n=h\cdot\rho\cdot j_n=T^p\cdot j_n, \quad T^p=h\cdot\rho, \quad (4.75)$$

$$dI=h \cdot j_{\tau} \cdot dl=h \cdot \gamma \cdot E_{\tau} \cdot dl=S^{\gamma} \cdot E_{\tau} \cdot dl, \quad S^{\gamma}=h \cdot \gamma, \quad (4.75')$$

где E_n и j_n – нормальные компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{j} в слое; E_{τ} – полная тангенциальная компонента вектора \mathbf{E} в нём; $\rho=1/\gamma$ – удельное электрическое сопротивление слоя; T^{ρ} и S^{γ} – поперечное сопротивление и продольная проводимость слоя. Представим себе, что толщина h слоя очень мала, но его удельное сопротивление ρ или его удельная электропроводность γ имеет очень большое значение и поэтому «параметр» слоя T^{ρ} или S^{γ} (соответственно) не является малой величиной. В присутствии такого слоя в первом случае возникает значительное напряжение \mathcal{E}_{12} поля \mathbf{E} между поверхностями (границами слоя) S_1 и S_2 , что приводит к перераспределению потенциалов вне слоя, а во втором случае получается значительной величины электрический ток I в слое, что вне слоя приводит к перераспределению тока.

Таким образом, имеем влияние тонкого слоя, обусловленное его поперечным сопротивлением T^{ρ} при $\rho \gg \rho_1$ и $\rho \gg \rho_2$ и его продольной проводимостью S^{γ} при $\gamma \gg \gamma_1$ и $\gamma \gg \gamma_2$. В первом случае можно пренебречь тангенциальной компонентой E_{τ} поля \mathbf{E} внутри слоя и, следовательно, считать, что вдоль слоя ток $I=0$, а во втором случае можно пренебречь нормальной компонентой E_n поля внутри слоя и, следовательно, считать напряжение $\mathcal{E}_{12}=0$.

Такие слои (см. рис. 4.18) при одинаковых значениях T^{ρ} , либо S^{γ} , но разных величинах $\rho=1/\gamma$ и h , могут оказывать практически одинаковое влияние на характеристики поля \mathbf{E} , измеряемые в методах ВЭЗ, БКЗ. Эта T – эквивалентность, либо S – эквивалентность, ведёт к неоднозначности решения обратных задач.

Полагая $h \rightarrow 0$ при неизменном значении T^{ρ} в первом случае и S^{γ} – во втором, получаем «экранирующую поверхность» с конечным поперечным сопротивлением или с конечной продольной проводимостью, т. е. предельно тонкий слой, для которого

$$h \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow \infty, \quad E_n = \rho \cdot j_n \rightarrow \infty, \quad h \cdot \rho = T^{\rho}, \quad T^{\rho} \cdot j_n = h \cdot E_n = U^{(1)} - U^{(2)} \quad (4.76)$$

или

$$h \rightarrow 0, \quad \gamma \rightarrow \infty, \quad j_{\tau} = \gamma \cdot E_{\tau} \rightarrow \infty, \quad h \cdot \gamma = S^{\gamma}, \quad S^{\gamma} \cdot E_{\tau} = h \cdot j_{\tau} = i, \quad (4.76')$$

где $U^{(1)} - U^{(2)} = \mathcal{E}_{12}$ – перепад потенциала на экранирующей поверхности; i – абсолютная величина поверхностной плотности тока \mathbf{i} .

В (4.76) считаются конечными значения величин T^{ρ} , j_n , $U^{(1)} - U^{(2)}$, а в (4.76') – S^{γ} , E_{τ} , i .

Продольная проводимость, поверхности есть величина, обратная сопротивлению, которое оказывает квадратная площадка (произвольной, но достаточно малой величины) этой поверхности току, параллельному её стороне. Поперечное сопротивление поверхности есть сопротивление, которое оказывает площадка (произвольной формы, но достаточно малой величины) этой поверхности пронизывающему её (по нормали) току, умноженное на площадь этой площадки. Эти тонкие слои и заменяющие их поверхности можно называть несовершенными экранирующими или несовершенными экранами в отличие от совершенного экрана, каковым является слой с удельным сопротивлением ρ , равным бесконечности или нулю, независимо от его

толщины h , или поверхность, заменяющая такой слой. В первом из этих случаев $T^p = \infty$, а во втором – $S^\gamma = \infty$.

В некоторых случаях продольную проводимость предельно тонкого слоя называют поверхностной проводимостью.

Пользуясь выражением $\mathbf{E} = -\nabla U$ и принимая во внимание непрерывность компоненты $j_n = -\gamma \cdot \frac{\partial U}{\partial n}$ получаем из (4.76) для поверхности с поперечным сопротивлением:

$$U^{(2)} - U^{(1)} = T^p \cdot \gamma \cdot \frac{\partial U}{\partial n}. \quad (4.77)$$

Подставляя (4.76') в (4.18) и учитывая непрерывность компоненты $E_\tau = -\text{grad}^S U$, получаем для поверхности с продольной проводимостью:

$$\gamma_2 \cdot \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} - \gamma_1 \cdot \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n} = -\text{div}^S (S^\gamma \cdot \text{grad}^S U), \quad (4.78)$$

$$\gamma_2 \cdot \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} - \gamma_1 \cdot \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n} = -S^\gamma \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t'^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial t''^2} \right) \quad \text{при} \quad \text{grad}^S S^\gamma = 0, \quad (4.78')$$

где grad^S – двухмерный градиент (см. (1.41)) на поверхности S ; t' и t'' – любые взаимно перпендикулярные тангенциальные к этой поверхности направления t (см. [рис. 1.2](#) в главе первой); множитель при S^γ – двухмерный лапласиан функции U на поверхности S .

V. Влияние включения

Обратимся теперь к случаю инородного включения, рассмотренному в § 4, и для простоты положим, что поле $\mathbf{E}^{\text{ппв}}$ однородно (см. [рис. 4.16](#)).

Заряды распределяются на поверхности включения так, что они при $\gamma_2 > \gamma_1$ ([рис. 4.16, б](#)) усиливают поле \mathbf{E} спереди и сзади включения (считая по направлению поля $\mathbf{E}^{\text{ппв}}$) и ослабляют это поле внутри включения. При $\gamma_2 < \gamma_1$ ([рис. 4.16, а](#)) наблюдаем усиление поля \mathbf{E} внутри включения и ослабление спереди и сзади него. Вдали от включения поле, создаваемое зарядами, находящимися на его поверхности, исчезающе мало и, следовательно, $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{ппв}}$.

Вне области Θ , занятой включением, его влияние на поле \mathbf{j} является таким же, как на поле \mathbf{E} , так как множитель γ в выражении $\gamma \cdot \mathbf{E}$ для вектора \mathbf{j} здесь остаётся без изменения. Что же касается области Θ , занятой включением, то в ней поле \mathbf{j} , кроме того, ещё меняется (по сравнению с \mathbf{E}) пропорционально изменению множителя γ . В результате обоих изменений плотность тока j в области Θ увеличивается при $\gamma_2 > \gamma_1$ ([рис. 4.16, з](#)) и уменьшается при $\gamma_2 < \gamma_1$ ([рис. 4.16, в](#)), хотя поле E в этой области уменьшается при $\gamma_2 > \gamma_1$ и увеличивается при $\gamma_2 < \gamma_1$.

Характер изменения поля \mathbf{E} у боковой части поверхности включения вне области Θ – тот же, что внутри включения.

Изменение поля \mathbf{j} при $\gamma_2 > \gamma_1$ сводится к сгущению токовых линий l_j внутри

включения за счёт их разрежения вне включения у его боковой поверхности. Перераспределение тока между включением и его боковой периферией проявляется также перед включением (телом) Θ и за ним, токовые линии сближаются у входа в него и у выхода из него, чему соответствует указанное выше усиление поля E в этих местах. При $\gamma_2 < \gamma_1$ получается разрежение токовых линий внутри включения, а также перед ним и за ним, за счёт чего по бокам включения (снаружи) токовые линии сгущаются.

Таким образом, электрический ток как бы стремится проходить преимущественно там, где меньше удельное электрическое сопротивление $\rho = 1/\gamma$.

Фактически же (в изотропной по γ среде, во внешних частях цепей тока) вектор $\mathbf{j} \parallel \mathbf{E}$ (положительные микрочастицы движутся по направлению поля E). При этом в каждой точке a направления векторных линий I_j и I_E – одинаковы. Но стационарное поле E создают все электрические заряды, в том числе согласно (4.50) – поверхностные заряды с плотностью $\sigma_{\gamma E}$, индуцированные на поверхностях разрыва γ (см. рис. 4.16, рис. 4.18).

§ 6. СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ЗЕМЛЕ

Геофизик-разведчик изучает токи в земле – в проводнике, который можно считать простирающимся до бесконечности. Такие токи (а также проводники и цепи, по которым они проходят) следует всегда рассматривать как пространственные в отличие от обычно применяемых в технике токов (в проводах), которые часто можно считать линейными. В случае пространственной цепи область Θ_I , занятая токовыми линиями, может иметь поперечные сечения, простирающиеся очень далеко, теоретически до бесконечности, а кольцевая область Θ_0 , охватываемая токовым кольцом, может иметь поперечные сечения с нулевой площадью. Для существования постоянного тока, полностью расположенного в земле, необходимо, чтобы в ней где-то действовали сторонние силы (э. д. с.). Они могут быть объёмными или контактными.

В первом случае это стороннее поле (с напряжённостью $E^{стр}$) в некоторой области пространства, образующей внутренний участок цепи тока. Такие сторонние силы существуют в земле, например, там, где происходит фильтрация воды через проницаемую породу (песок, песчаник). В этом случае имеем стороннее поле электрокинетической природы с напряжённостью $E^{фл} = -k_{фл} \cdot \text{grad } p$, где p – давление, а $k_{фл}$ – множитель, зависящий от свойств воды и породы и обычно положительный.

Другим примером стороннего поля в земле является поле диффузионной природы с напряжённостью $E^{дф} = k_{дф} \cdot \text{grad } \lg c$, где c – концентрация раствора, заполняющего поры породы, а $k_{дф}$ – множитель пропорциональности, зависящий от раствора и породы.

Такое стороннее поле получается там, где происходит диффузия электролита, анионы и катионы которого перемещаются с различными скоростями. Множитель $k_{дф} > 0$, когда средняя скорость аниона больше.

Контактные э. д. с. диффузионной природы с напряжением $\mathcal{E}_{12}^{кнт} = k_{дф} \cdot (\lg c_1 - \lg c_2)$ присутствуют на поверхностях соприкосновения растворов (в порах пород) с различными концентрациями c_1 и c_2 . Контактные э. д. с. окислительно-восстановительной природы в земле существуют на поверхностях соприкосновения некоторых руд с вмещающими породами (с водой, насыщающей их поры).

I. Цепь тока с питающими электродами

Создавая в земле электрический ток при помощи генератора и питающего кабеля с заземлёнными концами, получаем цепь, не полностью находящуюся в земле. Она состоит из двух частей: *линейной части*, к которой будем относить кабель вместе с генератором и контрольно-измерительными приборами, и *пространственной части*, расположенной в земле и имеющей поперечные сечения, которые достигают очень больших, практически неограниченных, размеров (рис. 4.20).

Пространственную часть цепи соединяют с её линейной частью посредством питающих электродов, которые представляют собой проводники (металлические), отличающиеся большой удельной электропроводностью по сравнению с горными породами (пространственной части) и имеющие площади соприкосновения с ними, большие по сравнению с поперечным сечением провода (линейной части).

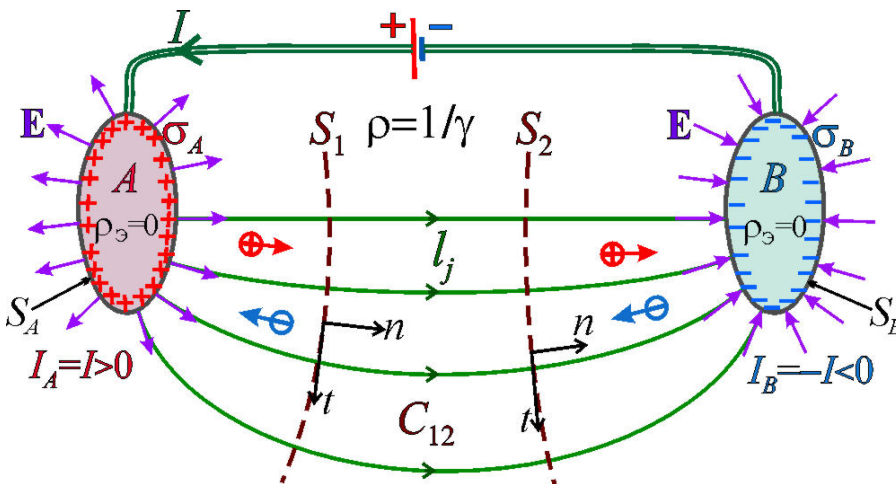


Рис. 4.20.

Цепь тока, состоящая из линейной и пространственной частей, соединённых токовыми электродами *A* и *B*

в случае линейного (или поверхностного) электрода, расположенного на эквипотенциальной поверхности наблюдаемого поля.

Внесённый в стационарное поле E идеально проводящий шар любого радиуса при отсутствии других нарушений однородности среды оставляет без изменения потенциал точки, в которой оказался его центр ([Альпин, 1971], с. 183). Поэтому такой шар на достаточных (по сравнению с его радиусом) расстояниях от неоднородностей среды и, в частности, от других неточечных электродов (питающих, и измерительных) пригоден в качестве измерительного электрода для определения потенциала в точке, в которую помещают центр шара.

В пространственной части величина ρ (горных пород) обычно чрезвычайно велика по сравнению с удельным электрическим сопротивлением в линейной части цепи (проводов). Но площади поперечных сечений цепи на неконцевых (не прилегающих к концам линейной части) участках также очень велики. Поэтому неконцевые участки C_{12} пространственной части имеют небольшие сопротивления R_{12} и, следовательно, не мешают получению тока, достаточного для возникновения на таких участках ощутимых напряжений $\mathcal{E}_{12} = R_{12} \cdot I = U_1 - U_2$.

При измерениях напряжений в пространственной части цепи применяют измерительные электроды. Здесь, как правило, будет идти речь только о питающих электродах.

Измерительный электрод, через который в момент измерения ток не проходит, влияет на поле как всякое другое инородное включение. Это влияние отпадает в случае точечного электрода, а также в

На этих участках цепи получаются весьма малые (сравнительно с плотностью тока в линейной части) плотности тока j , но не слишком малые напряжённости поля E так как $E = \rho \cdot j$. В некоторых случаях удобно причислять электроды к пространственной части цепи и рассматривать их как хорошо проводящие включения в ней.

Для простоты изложения будем, как правило, считать электроды идеально проводящими и имеющими ограниченные размеры. В общем случае будем полагать, что электроды находятся на глубине и окружены проводящей средой, причём погруженные, в неё части проводов, питающих электроды током, вместе с изоляцией имеют чрезвычайно малые поперечные размеры и поэтому практически не нарушают однородности среды (см. раздел I § 8).

II. Эмиссия и заряд электрода

Рассмотрим два поперечных сечения цепи $S_{\mathcal{E}}$ и S_L , где $S_{\mathcal{E}}$ – почти замкнутая поверхность соприкосновения электрода \mathcal{E} с окружающей средой, а S_L – поверхность его соприкосновения с концом питающей линии. Согласно (4.19) потоки вектора \mathbf{j} через эти поверхности – одинаковы, если считать нормали n на них направленными в одну сторону, т. е. по направлению тока, либо против него. Направляя нормаль на поверхности S_L (на поперечном сечении линейной части) по току, а на поверхности $S_{\mathcal{E}}$ наружу относительно тела электрода, имеем

$$I_{\mathcal{E}} = \pm I, \quad I = \int_{S_L} (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}), \quad I_{\mathcal{E}} = \int_{S_{\mathcal{E}}} (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}), \quad (4.79)$$

где $I > 0$ – электрический ток в линейной части цепи; $I_{\mathcal{E}}$ – ток "питания" земли электродом – его *эмиссия*, положительная, когда из электрода ток поступает в землю, и отрицательная в противном случае. В первом случае будем называть электрод и его ток эмиссии положительными, а во втором – отрицательными.

Согласно (4.54') имеем на поверхности $S_{\mathcal{E}}$ заряд, величину $e_{\mathcal{E}}$ и плотность $\sigma_{\mathcal{E}}$ которого определяют формулы

$$\sigma_{\mathcal{E}} = \varepsilon_0 \cdot E_n = \varepsilon_0 \cdot \rho \cdot j_n, \quad e_{\mathcal{E}} = \varepsilon_0 \cdot \int_{S_{\mathcal{E}}} E_n dS = \varepsilon_0 \cdot \int_{S_{\mathcal{E}}} \rho \cdot j_n dS, \quad (4.80)$$

где E_n , j_n и ρ – нормальные компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{j} и удельное электрическое сопротивление среды вне электрода у его поверхности; нормаль n , как было условлено, направлена от электрода к окружающей его среде. Плотность эмиссии электрода, т. е. величина j_n на его поверхности согласно (4.80)₁ пропорциональна плотности $\sigma_{\mathcal{E}}$ заряда на этой поверхности и удельной электропроводности $\gamma = 1/\rho$ окружающей среды вблизи неё. Если удельное сопротивление среды у поверхности $S_{\mathcal{E}}$ всюду имеет одно и то же значение ρ , т. е. если среда у электрода однородна по ρ , то *заряд электрода*

$$e_{\mathcal{E}} = \varepsilon_0 \cdot \rho \cdot \int_{S_{\mathcal{E}}} (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}) = \varepsilon_0 \cdot \rho \cdot I_{\mathcal{E}} = \pm \varepsilon_0 \cdot \rho \cdot I. \quad (4.81)$$

Знаки (\pm) соответствуют знакам электродов.

Идеально проводящий электрод называют также эквипотенциальным. У его поверхности $S_{\mathcal{E}}$ (вне электрода) имеем согласно (4.73)

$$E_t = 0, \quad j_t = 0, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_n, \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_n, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = -E_t = 0, \quad (4.82)$$

т. е. поверхность $S_{\mathcal{E}}$ является эквипотенциальной.

III. Поле в пространственной части цепи тока

Допустим, что линейная часть цепи тока соединена с землёй двумя идеально проводящими питающими электродами A и B , как показано на **рис. 4.20**, и пусть $I_A = I$ и $I_B = -I$ – эмиссии этих электродов. Согласно изложенному в разделе IV § 2, пространственная часть цепи тока (т. е. её участок C_{AB} , заключённый между поверхностями S_A и S_B электродов A и B или между концами питающей линии, к которым присоединены электроды) является автономным (см. **рис. 4.12. в, з**).

Токовые линии в пространственной части цепи заполняют обширную область пространства и различны по длине и конфигурации. Распределение вектора \mathbf{j} должно здесь удовлетворять требованию, чтобы по *любой* из токовых линий l_j иметь одинаковое (одно и то же) напряжение

$$\mathcal{E}_{AB} = \int_A^B (\mathbf{E} \, d\mathbf{l}) = \int_A^B \rho \cdot (\mathbf{j} \, d\mathbf{l}) = U_A - U_B = R_{AB} \cdot I = \mathcal{E}^{\text{стр}} - R_L \cdot I, \quad (4.83)$$

где U_A и U_B – потенциалы электродов A и B ; $\mathcal{E}^{\text{стр}}$ – э. д. с. генератора; включённого в питающую линию; R_L – сопротивление этой линии, а

$$I = \frac{\mathcal{E}^{\text{стр}}}{R_L + R_{AB}} \quad \text{и} \quad R_{AB} = \frac{1}{I} \cdot \int_A^B \rho \cdot (\mathbf{j} \, d\mathbf{l}) = \frac{1}{I} \cdot \int_A^B (\mathbf{E} \, d\mathbf{l}) \quad (4.84)$$

– электрический ток в цепи и сопротивление её участка C_{AB} , т. е. пространственной части цепи.

Источниками поля \mathbf{E} в пространственной части цепи тока являются заряды $e_{\gamma E}$, определяемые формулами (4.50). Из них заряды e_A и e_B находятся на поверхностях S_A и S_B электродов A и B , а остальные заряды $e_{\gamma E}$ – внутри участка C_{AB} (в местах нарушения однородности среды) и на его боковой поверхности (на поверхности земли, непроводящего фундамента). Если среды, окружающие электроды A, B , однородны (порознь), то согласно (4.81)

$$e_A = \epsilon_0 \cdot \rho_A \cdot I, \quad e_B = -\epsilon_0 \cdot \rho_B \cdot I, \quad (4.85)$$

где ρ_A и ρ_B – удельные электрические сопротивления этих сред.

В общем случае линейная часть цепи тока может разветвляться и присоединяться к пространственному проводнику в различных местах при помощи многих электродов \mathcal{E} с токами $I_{\mathcal{E}}$ разной величины и разного направления (в землю и из неё).

Размеры проводника, образующего пространственную часть цепи тока, весьма велики и он простирается до таких расстояний (от электродов), на которых поле \mathbf{E} становится незаметным. Поэтому будем представлять себе, что

в общем случае пространственная часть цепи тока образует всё пространство, заполненное средой с удельной электропроводностью $\gamma(a)$, а верхнее полупространство, заполненное воздухом, и другие части пространства, заполненные непроводящей средой, будем рассматривать как области, в которых функция $\gamma(a)$ обращается в нуль. Электроды (металлические) можно рассматривать как идеально проводящие включения, на поверхностях которых заданы заряды $e_{\mathcal{E}}$. Кроме этих зарядов, имеем заряды $e_{\gamma E}$ в местах нарушения однородности среды.

Потенциал и напряжённость поля, создаваемого всеми этими зарядами, в соответствии с (2.45), (2.12), (2.114) определяют формулы

$$U(a) = U_{\mathcal{E}}(a) + \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{L_{qa}} dS + \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \int_V \frac{\delta}{L_{qa}} dV, \quad (4.86)$$

$$\mathbf{E}(a) = \mathbf{E}_{\mathcal{E}}(a) + \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{L_{qa}^3} \mathbf{L}_{qa} dS + \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \int_V \frac{\delta}{L_{qa}^3} \mathbf{L}_{qa} dV, \quad (4.86')$$

где S – поверхности раздела (в частности, земная поверхность); V – области, в которых величина γ меняется непрерывно; σ и δ – плотности поверхностных и объёмных зарядов $e_{\gamma E}$, определяемые по (4.50);

$$U_{\mathcal{E}}(a) = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \int_{S_{\mathcal{E}}} \frac{\sigma_{\mathcal{E}}}{L_{qa}} dS, \quad \mathbf{E}_{\mathcal{E}}(a) = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \int_{S_{\mathcal{E}}} \frac{\sigma_{\mathcal{E}}}{L_{qa}^3} \mathbf{L}_{qa} dS \quad (4.87)$$

– потенциал и напряжённость поля, создаваемого зарядами $e_{\mathcal{E}}$ электродов \mathcal{E} .

Если среда всюду однородна или, точнее, если нарушения её однородности находятся на расстояниях от области пространства, содержащей электроды \mathcal{E} и точку a , достаточно больших по сравнению с размерами этой области, то вместо (4.86), (4.86') получаем $U(a)=U_{\mathcal{E}}(a)$, $\mathbf{E}(a)=\mathbf{E}_{\mathcal{E}}(a)$. Если обесточить электроды \mathcal{E} , то получим всюду $\mathbf{j}=0$, и, следовательно, $\mathbf{E}=0$. При этом исчезнут заряды электродов $e_{\mathcal{E}}$, а также все заряды $e_{\gamma E}$, находящиеся в местах нарушения однородности среды. Таким образом, поле, определяемое формулами (4.86), (4.86'), создаётся с помощью электродов (обусловлено существованием электродов \mathcal{E} , питаемых токами $I_{\mathcal{E}}$). Поэтому всё это поле будем иногда называть полем электродов в присутствии неоднородной среды, хотя оно, конечно, отличается от поля $\mathbf{E}^{\mathcal{E}}$, являющегося только частью поля \mathbf{E} , источники которой находятся на электродах.

Согласно (4.80)₁ плотность зарядов $\sigma_{\mathcal{E}}$ в любой точке q поверхности $S_{\mathcal{E}}$ какого-либо электрода \mathcal{E} определяет компонента E_n поля \mathbf{E} , создаваемого всеми зарядами и, следовательно, $\sigma_{\mathcal{E}}$ зависит от эмиссии, формы и размеров всех электродов и от удельного электрического сопротивления среды во всём пространстве. Величину $\sigma_{\mathcal{E}}$ можно представить как сумму двух плотностей: $\sigma_{\mathcal{E}} = \sigma_{\text{сбс}} + \sigma_{\text{инд}}$, где $\sigma_{\text{сбс}}$ – плотность собственного заряда $e_{\text{сбс}}$ электрода \mathcal{E} , т. е. плотность электричества, которую мы имели бы на поверхности электрода при заданной его эмиссии, если бы среда была всюду однородной и такой же, как у этой поверхности, а остальные электроды находились бы на расстояниях от

электрода \mathcal{E} *больших* по сравнению с его линейными размерами, а $\sigma_{\text{инд}}$ – плотность зарядов e^+ и e^- , индуцированных полями зарядов остальных электродов и зарядов, находящихся в местах нарушения однородности среды.

Согласно (4.62) сумма зарядов, индуцированных на поверхности электрода, равна нулю. Поэтому заряд электрода $e_{\mathcal{E}}=e_{\text{сбс}}$, не зависит от других электродов и от нарушений однородности среды, не соприкасающихся с поверхностью $S_{\mathcal{E}}$ электрода \mathcal{E} .

Распределение зарядов $e_{\text{сбс}}$, e^+ и e^- по поверхности $S_{\mathcal{E}}$ вместе с распределением других источников поля должно удовлетворять формулам, определяющим поведение поля в местах нарушения однородности среды и условию обращения в нуль напряжённости поля в любой точке внутри каждого идеально проводящего электрода, как внутри любого другого идеального проводника.

IV. Взаимно независимые электроды. Уединённый электрод

Представим себе область V , содержащую электрод и столь обширную, что напряжённость поля, создаваемого зарядом этого электрода, можно у её краёв считать равной нулю. Допустим также, что все остальные электроды находятся на столь больших расстояниях от области V , что их поле в ней можно считать равным нулю по сравнению с полем электрода \mathcal{E} .

Предполагается, что размеры электродов, их эмиссии и расстояния между ними ограничены и что неоднородность среды, как это обычно бывает в земле, не мешает достаточно быстрой убыли напряжённости поля \mathbf{E} с удалением от электродов.

Такие условия позволяют при расчёте поля в области V считать её простирающейся по всем направлениям до бесконечности и отвлечься от существования всех электродов, кроме того, который находится в области V .

Таким образом, приходим к представлению об электроде, независимом от остальных электродов, и можем рассматривать поле одного отдельно взятого электрода, хотя фактически для получения постоянного тока в земле с помощью электродов их должно быть не меньше двух. В поле такого электрода все токовые линии проходят от его поверхности до бесконечности или в обратном направлении. В этом случае проводящая среда, заполняющая пространство (область V), образует участок цепи тока $C_{\mathcal{E}\infty}$ или $C_{\infty\mathcal{E}}$, заключённый между поверхностью электрода $S_{\mathcal{E}}$ и бесконечно удалённой поверхностью S_{∞} с потенциалом U_{∞} . Так же, как при изучении статического поля, будем считать, что S_{∞} – сферическая поверхность бесконечно большого радиуса, и будем полагать, что $U_{\infty}=0$.

Для определённости допустим, что электрод положительный. Поперечные сечения цепи тока на участке $C_{\mathcal{E}\infty}$ представляют собой замкнутые эквипотенциальные поверхности S^E , из которых каждая охватывает все поверхности S^E с *большими* потенциалами и охватывается всеми поверхностями S^E с *меньшими* потенциалами. Разность потенциалов U_M-U_N между двумя точками M и N представляет собой падение потенциала на участке

цепи C_{MN} , заключённом между её двумя эквипотенциальными сечениями S_M и S_N , проходящими через эти точки. Этот участок – замкнутый уровеньный слой, охватывающий электрод \mathcal{E} ; длиной участка является толщина этого слоя, взятая по силовой линии, а его поперечными сечениями – эквипотенциальные поверхности $U=\text{const}$, проходящие между поверхностями S_M и S_N .

В соответствии с (4.24) – (4.25) имеем для напряжения \mathcal{E}_{MN} на участке C_{MN} и для сопротивления R_{MN} этого участка выражения

$$\mathcal{E}_{MN} = \int_M^N (\mathbf{E} \, d\mathbf{l}) = U_M - U_N = I \cdot R_{MN}, \quad R_{MN} = \int_M^N \rho \cdot \left(\frac{\mathbf{j}}{I} \, d\mathbf{l} \right), \quad (4.88)$$

где путь интегрирования берётся по току.

В частности, если взять точку N на бесконечности и выбрать $U_\infty=0$, получим

$$U_M = I \cdot R_{M\infty}, \quad R_{M\infty} = \int_M^\infty \rho \cdot \left(\frac{\mathbf{j}}{I} \, d\mathbf{l} \right). \quad (4.89)$$

Если, кроме того, взять точку M на поверхности электрода, то будем иметь

$$U_{\mathcal{E}} = I \cdot R_{\mathcal{E}}, \quad R_{\mathcal{E}} = \int_{\mathcal{E}}^\infty \rho \cdot \left(\frac{\mathbf{j}}{I} \, d\mathbf{l} \right), \quad (4.90)$$

где U_M – потенциал произвольно взятой точки M ; $U_{\mathcal{E}}$ – потенциал электрода; $R_{M\infty}$ – сопротивление, оказываемое току средой на пути от поверхности S_M до бесконечности или, точнее, до мест, столь удалённых от электрода, что в них поле \mathbf{E} , создаваемое при его помощи, незаметно; $R_{\mathcal{E}}$ – сопротивление всего участка $C_{\mathcal{E}\infty}$, т. е. сопротивление, оказываемое току средой на пути от поверхности электрода до бесконечности. Величину $R_{\mathcal{E}}$ будем называть *сопротивлением электрода (как заземления)*. Несмотря на бесконечно большую длину участка $C_{M\infty}$ и, в частности, участка $C_{\mathcal{E}\infty}$, его сопротивление и величина падения потенциала на нём, т. е. $R_{M\infty}$ и U_M и, в частности, $R_{\mathcal{E}}$ и $U_{\mathcal{E}}$ имеют ограниченные значения. Это объясняется уменьшением напряжённости поля \mathbf{E} с увеличением расстояния от электрода. При достаточной величине этих расстояний напряжённость поля (и плотность тока) уменьшается столь быстро, что несобственные интегралы в формулах (4.89), (4.90) сходятся. Более того, обычно при определении сопротивления электрода $R_{\mathcal{E}}$ и его потенциала $U_{\mathcal{E}}$ по формулам (4.90) интегрирование практически можно ограничить не очень большими верхними пределами. Возьмём на какой-либо токовой линии l_j точки через равные интервалы Δl (рис. 4.21, а); проведём через эти точки эквипотенциальные поверхности и таким образом разделим участок $C_{\mathcal{E}\infty}$ на короткие участки ΔC_i одинаковой длины (по линии l_j), т. е. на охватывающие электрод уровеньные слои с толщиной одинакового порядка и с площадью, быстро возрастающей с удалением от электрода.

Сопротивление (заземления) электрода $R_{\mathcal{E}}$ и его потенциал $U_{\mathcal{E}}$ представляют собой (соответственно) сумму сопротивлений ΔR_i , этих слоёв

(рис. 4.21, б) и сумму падений потенциала $\Delta U_i = I \cdot \Delta R_i$ на них:

$$U_{\Sigma} = \Sigma U_i = I \cdot \Sigma \Delta R_i, \quad R_{\Sigma} = \Sigma \Delta R_i. \quad (4.91)$$

Но дальние слои очень мало влияют на R_{Σ} и U_{Σ} вследствие обратной зависимости сопротивления слоя от площади его поверхности. Поэтому даже значительные изменения среды и, следовательно, характера полей \mathbf{j} и \mathbf{E} вдали от электрода не оказывают заметного влияния на его сопротивление R_{Σ} и потенциал U_{Σ} между тем как небольшие изменения среды в непосредственной близости к поверхности электрода или формы и размеров этой поверхности могут сильно изменить эти величины.

Сопротивления ΔR_i уровневых слоёв, прилегающих к электроду, сильно увеличиваются

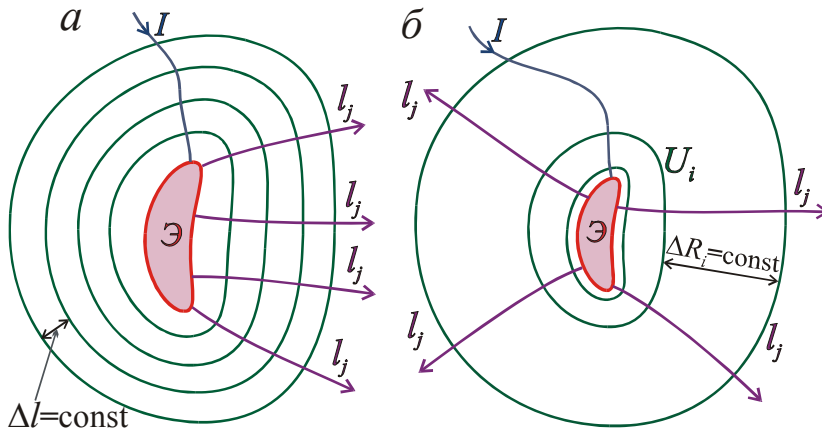


Рис. 4.21.

Поле у уединённого эквипотенциального электрода.

Среда, окружающая электрод, разделена на охватывающие его слои одинаковой (по токовой линии l_j), толщины Δl (а);

среда разделена на охватывающие электрод слои

одинакового сопротивления ΔR_i ; толщина слоя быстро возрастает с увеличением его расстояния от электрода (б)

с уменьшением площади S_{Σ} поверхности электрода (при неизменной его форме). При $S_{\Sigma} \rightarrow 0$ $R_{\Sigma} \rightarrow \infty$. Поэтому либо эмиссия $I_{\Sigma} \rightarrow 0$, либо (неограниченно увеличивая э. д. с.) $U_{\Sigma} \rightarrow \infty$, $\sigma_{\Sigma} \rightarrow \infty$, $j_n \rightarrow \infty$. Это соответствует случаю, когда электрод заменён непосредственным контактом линейной части цепи с её пространственной частью. Назначение электрода состоит в том, чтобы предотвратить чрезмерное увеличение сопротивления концевой участка пространственной части цепи (прилегающего к её стыку с линейной частью).

Пространственную часть цепи тока,

содержащей два взаимно независимых электрода A и B , можно в соответствии с изложенным представить как бы состоящей из трёх последовательно включённых участков $C_{A\infty}$, $C_{\text{ср}}$ и $C_{\infty B}$, из которых первый и третий – крайние участки с сопротивлениями R_A и R_B – представляют собой пространства (точнее, обширные области), содержащие, электроды A и B , а второй – средний участок пространственной части цепи, на котором все её эквипотенциальные сечения имеют огромные площади. Сопротивления R_A и R_B велики по сравнению с сопротивлением $R_{\text{ср}}$ участка $C_{\text{ср}}$. Поэтому практически сопротивление пространственной части цепи $R_{AB} = R_A + R_B$.

Аналогично можно определить проводимость $1/R$ параллельного соединения m одноимённых взаимно независимых электродов A_i ($i=1, 2, \dots, m$), через проводимости $1/R_i$ этих электродов: $1/R = \Sigma(1/R_i)$.

В общем случае, т. е. при произвольных расстояниях между электродами, имеем взаимно зависимые электроды. Каждый из них может иметь и собственный заряд и индуцированные полями других электродов заряды.

Взаимная индукция электродов влияет на распределения эмиссии по их поверхностям. В частности, при сближении двух одноимённых или разноимённых электродов происходит соответственно уменьшение или увеличение плотности поверхностных зарядов и эмиссий на их сторонах, которыми они обращены друг к другу, за счёт остальных частей их поверхностей. В связи с этим для последовательного соединения электродов A и B имеем

$$R_{AB} \leq R_A + R_B, \quad \mathcal{E}_{AB} \leq I \cdot (R_A + R_B), \quad (4.92)$$

а для параллельного соединения m электродов A_i проводимость

$$\frac{1}{R} \leq \sum_1^m \frac{1}{R_i}, \quad (4.92')$$

где знаки равенства соответствуют соединениям взаимно независимых электродов.

Электрод в неограниченной однородной среде при «отсутствии» других электродов будем называть *уединённым электродом* (см. рис. 4.21).

В случае уединённого электрода согласно (4.86), (4.86') $U=U_{\mathcal{E}}$, $\mathbf{E}=\mathbf{E}_{\mathcal{E}}$, где $U_{\mathcal{E}}$ и $\mathbf{E}_{\mathcal{E}}$ определяют формулы (4.87). В этом случае индуцированных зарядов на электроде нет, но поле, всё же, зависит не только от величины заряда $e_{\mathcal{E}}$, но также от его распределения на поверхности $S_{\mathcal{E}}$. Значения плотности $\sigma_{\mathcal{E}}$ на элементах поверхности $S_{\mathcal{E}}$ в данном случае, согласно (4.60), (4.61), связаны между собой однородным интегральным уравнением

$$\sigma(p) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_S \frac{\sigma(q)}{L_{qp}^3} \cdot (\mathbf{L}_{qp} \mathbf{n}_p) dS. \quad (4.93)$$

Разделив равенство (4.93) на $2 \cdot \epsilon_0$, получаем в левой части взятую с обратным знаком компоненту $E_n^{p(1)}(p)$ поля, создаваемого у точки p поверхности $S_{\mathcal{E}}$ (на её внутренней стороне) зарядом $\sigma(p) \cdot dS_p$ элемента dS_p этой поверхности, содержащего точку p . А в правой части получаем компоненту $E_n^*(p)$ поля, создаваемого в этой же точке зарядами на остальной части поверхности $S_{\mathcal{E}}$ (см, раздел II § 7 главы второй). Следовательно, равенство (4.93) выражает условие обращения в нуль компоненты E_n на внутренней стороне поверхности $S_{\mathcal{E}}$.

В (4.93), как и в (4.60), (4.61), средней точкой площадки dS считается q , а нормаль n берётся в точке p , поэтому множитель при $\sigma(q)$ в (4.93), вообще говоря, не имеет смысла угла видимости $d\omega$ площадки dS . Но если $S_{\mathcal{E}}$ – сферическая поверхность, то для любых её точек p и q скалярное произведение $(\mathbf{L}_{qp} \mathbf{n}_p) = (\mathbf{L}_{pq} \mathbf{n}_q)$, поэтому произведение $(\mathbf{L}_{qp} \mathbf{n}_p) \cdot L_{qp}^{-3} \cdot dS$ равно углу видимости площадки dS из точки p .

Из соображений симметрии ясно, что поверхность уединённого сферического электрода заряжена равномерно. Тем не менее, полезно убедиться, что для случая сферической формы электрода решением уравнения (4.93) является $\sigma = \text{const}$. Исходя из такого допущения, вынесем множитель $\sigma(q)$ за знак интегрирования. В результате согласно сказанному выше будем иметь под знаком интеграла угол видимости $d\omega$ площадки dS_q из точки p , а интегрируя, получим угол $\omega = 2\pi$ видимости внутренней стороны замкнутой поверхности из её точки p (см. (1.129)₃). Таким образом, уравнение (4.93) приводится к

равенству $\sigma(p)=\sigma(q)$, тождественному при $\sigma=\text{const}$.

Согласно (4.80) уравнение (4.93) определяет также распределение плотности j_n эмиссии по поверхности электрода. Тривиальное решение ($\sigma=0$, $j_n=0$) уравнения (4.93) отпадает согласно (4.79), если $I_{\mathcal{E}} \neq 0$.

Эквиэмиссионный (с равномерно распределённой плотностью эмиссии) *электрод* равномерно заряжен. В общем случае эквипотенциальный электрод не является эквиэмиссионным; он заряжен неравномерно за исключением случая сферической формы электрода.

V. Необъёмные электроды

Если точка a находится настолько далеко от электрода \mathcal{E} , что расстояние L_{qa} практически не зависит от положения точки q на поверхности $S_{\mathcal{E}}$, то

$$U_{\mathcal{E}}(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \cdot L_{qa}} \int_{S_{\mathcal{E}}} \sigma_{\mathcal{E}} dS = \frac{e_{\mathcal{E}}}{4\pi\epsilon_0 \cdot L_{\mathcal{E}a}}, \quad \mathbf{E}_{\mathcal{E}}(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{L}_{\mathcal{E}a}}{L_{\mathcal{E}a}^3}, \quad (4.94)$$

где $L_{\mathcal{E}a}$ – расстояние точки a от электрода \mathcal{E} или для большей определённости от некоторой произвольно взятой его («средней») точки \mathcal{E} . В этом случае не заметно влияние индуцированных зарядов, а также влияние формы, и размеров электрода \mathcal{E} , так как согласно (4.81) величина заряда $e_{\mathcal{E}}$ не зависит от них.

Допуская неточное определение поля вблизи электрода, можно мысленно как угодно уменьшать его размеры и, в частности, представить его поверхность $S_{\mathcal{E}}$ стянутой к точке \mathcal{E} . Таким образом, вместо объёмного электрода с поверхностным (или иным) зарядом $e_{\mathcal{E}}$ получим *точечный электрод* с точечным зарядом такой же величины $e_{\mathcal{E}}$. Поле точечного электрода в отличие от поля заменяемого им объёмного электрода определяется формулами (4.94) во всём пространстве. Точечный электрод удобен при теоретических расчётах, но имеет, как и точечный заряд, только формальный смысл, так как фактически создать в земле поле с помощью точечного электрода нельзя. При неограниченном умалении электрода получаем $R_{\mathcal{E}} \rightarrow \infty$ и, следовательно, чтобы получить ток заданной величины I в цепи, содержащей точечный электрод, понадобилось бы стороннее напряжение $\mathcal{E}^{\text{стр}} \rightarrow \infty$.

Согласно (4.94) и (4.81) поле, создаваемое зарядом точечного электрода, определяют формулы

$$U_{\mathcal{E}}(a) = \frac{\rho \cdot I_{\mathcal{E}}}{4\pi} \cdot \frac{1}{L_{\mathcal{E}a}}, \quad \mathbf{E}_{\mathcal{E}}(a) = \frac{\rho \cdot I_{\mathcal{E}}}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{L}_{\mathcal{E}a}}{L_{\mathcal{E}a}^3}. \quad (4.95)$$

В случае точечного электрода в неограниченной однородной среде эти формулы определяют всё (фактически действующее) поле в любой точке пространства.

В случае совокупности точечных электродов \mathcal{E}_q , находящихся в точках q , вместо (4.95) имеем

$$U_{\mathcal{E}}(a) = \frac{1}{4\pi} \cdot \sum \frac{\rho(q) \cdot I_q}{L_{qa}}, \quad \mathbf{E}_{\mathcal{E}}(a) = \frac{1}{4\pi} \cdot \sum \frac{\rho(q) \cdot I_q}{L_{qa}^3} \mathbf{L}_{qa}, \quad (4.95')$$

где $\rho(q)$ – значения ρ в точках q ; I_q – эмиссии электродов.

Обычно эмиссии I_q и значения $\rho(q)$ являются заданными и поле \mathbf{E}_\ominus , определяемое формулами (4.95'), можно считать первичной частью поля \mathbf{E} , выражаемого формулами (4.86), (4.86').

При сравнении (4.95) с (4.94) видим, что заряд точечного электрода с эмиссией I_\ominus , вблизи которого окружающая его среда однородна по удельному электрическому сопротивлению ρ , определяет выражение:

$$e_\ominus = \epsilon_0 \cdot \rho \cdot I_\ominus = \pm \epsilon_0 \cdot \rho \cdot I. \quad (4.95'')$$

Для поля \mathbf{E} точечного электрода, очевидно, справедливо всё сказанное в главе второй о поле точечного заряда. В частности, совокупность двух точечных электродов с эмиссиями $I_2 = I$ и $I_1 = -I$ (окружённых средой с одинаковым удельным электрическим сопротивлением ρ) при малом расстоянии L_{12} между ними образует электрический диполь с моментом

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 \cdot \rho \cdot I \cdot \mathbf{L}_{12}, \quad (4.96)$$

где ρ – удельное сопротивление среды, в которой находится диполь.

Поле \mathbf{E} , создаваемое *электродным диполем* в неограниченной однородной среде, определяют формулы, полученные в главе второй для поля диполя, с подстановкой выражения (4.96) для момента \mathbf{p} .

Из точечных электродов могут быть составлены квадруполь и мультиполи более высоких порядков.

Аналогично точечным электродам можно представить себе другие необъёмные электроды: линейные или поверхностные (которым соответствуют реальные электроды – очень вытянутой или сплюснутой формы), а также совокупности таких электродов, образующие линейные диполи и двойные слои.

Линейные и поверхностные электроды обычно не являются ни эквипотенциальными, ни эквиэмиссионными. Но для простоты расчёта полей иногда считают их эквипотенциальными или эквиэмиссионными. Расчёт поля эквиэмиссионного электрода сводится к суммированию полей его элементов, рассматриваемых как точечные электроды с элементарными эмиссиями.

§ 7. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ СТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ

Источники постоянного поля в проводящей среде не могут быть заданы произвольно и не могут считаться, известными при расчёте этого поля, так как плотности зарядов $e_{\gamma E}$ согласно (4.50) зависят от определяемого поля. Поэтому фактически вместо уравнений (4.47) применяют уравнения (4.33). Входящие в их состав функции γ и $\mathbf{E}^{\text{ср}}$ (или э. д. с.) могут быть заданы произвольно. Уравнения (4.33) должны быть дополнены уравнениями для поля \mathbf{E} :

$$\text{I. rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{I. Rot } \mathbf{E} = 0, \quad \oint_l (\mathbf{E} \, d\mathbf{l}) = 0. \quad (4.97)$$

Поля $\gamma \cdot \mathbf{E}$ и \mathbf{j} в отличие от поля \mathbf{E} не являются безвихревыми:

$$\text{rot } (\gamma \cdot \mathbf{E}) = -[\mathbf{E} \nabla \gamma], \quad \text{rot } \mathbf{j} = -[\mathbf{E} \nabla \gamma] + \text{rot } (\gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{ср}}). \quad (4.97')$$

Во внешней части цепи:

$$\text{rot } \mathbf{j} = -[\mathbf{E} \nabla \gamma], \quad \text{Rot } \mathbf{j} = [\mathbf{n} \boldsymbol{\tau}] \cdot (\gamma_2 - \gamma_1) \cdot E_\tau. \quad (4.97'')$$

Согласно (4.17) постоянное поле вектора \mathbf{j} аналогично полю \mathbf{B} , является чисто вихревым.

I. Система уравнений

Согласно (4.97)₁ и (4.17)₁ имеем для стационарного электрического поля систему дифференциальных уравнений:

$$\text{I. rot } \mathbf{E}=0, \quad \text{II. div } \mathbf{j}=0, \quad \text{где} \quad \mathbf{j}=\gamma \cdot (\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{ср}}) \quad (4.98)$$

– уравнение связи.

Подставляя в (4.98)₃ решение $\mathbf{E}=-\text{grad } U=-\nabla U$ уравнения (4.98)₁, получаем для вектора плотности тока \mathbf{j} выражение

$$\mathbf{j}=-\gamma \cdot (\nabla U - \mathbf{E}^{\text{ср}}), \quad (4.98')$$

подстановка которого в (4.98)₂ приводит к уравнению для потенциала U стационарного электрического поля:

$$\text{div}(\gamma \cdot \nabla U) = \text{div}(\gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{ср}}), \quad \text{т. е.} \quad \nabla^2 U + \frac{(\nabla \gamma \cdot \nabla U)}{\gamma} = \frac{\text{div}(\gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{ср}})}{\gamma}. \quad (4.99)$$

Найдя функцию U как решение этого уравнения, определяем поле $\mathbf{E}=-\nabla U$ и по заданным функциям γ и $\mathbf{E}^{\text{ср}}$ – определяем также поле $\mathbf{j}=\gamma \cdot (\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{ср}})$.

Прямая задача теории стационарного электрического поля состоит в определении полей \mathbf{E} и \mathbf{j} по заданным функциям γ и $\mathbf{E}^{\text{ср}}$. Вместо поля $\mathbf{E}^{\text{ср}}$ бывает известна э. д. с. или электрический ток в цепи.

Условия прямой задачи применительно к полю в земле в соответствии с изложенным в § 6 настоящей главы можем сформулировать в следующем виде. В пространстве, заполненном средой, электропроводность которой определена некоторой функцией (полем) $\gamma(a)$, заданы (питающие) электроды или сторонние силы (поле $\mathbf{E}^{\text{ср}}$, контактные э. д. с.). Питающие линии (и всё, что в них включено) исключаются из рассмотрения. Точечный электрод задаётся его эмиссией и положением (координатами), а эквипотенциальный – его эмиссией, формой, размерами и расположением. В случае неэквипотенциального электрода задаются ещё некоторые данные об электропроводности тела электрода и о способе его питания током.

Система (4.98) и эквивалентное ей уравнение (4.99) не содержат диэлектрической проницаемости ϵ и, следовательно, ими определяются поле \mathbf{E} и его потенциал U в проводящей среде независимо от её проницаемости ϵ . При известном фактическом распределении ϵ в проводящей среде можно было бы по найденному полю \mathbf{E} рассчитать его свободные и связанные источники, пользуясь формулами § 3 третьей главы. Не зная функции ϵ , можно в принципе по полю \mathbf{E} определить полные заряды и их виды $e_{\gamma E^{\text{ср}}}$ и $e_{\gamma E}$ по формулам § 4 и § 5 этой главы. Более того, при соответствующих условиях можно, не зная поля \mathbf{E} , определить заряды, его создающие, пользуясь соответствующими интегральными уравнениями § 4 и § 6.

II. Условия единственности

В соответствии с изложенным в § 7 и § 8 главы первой расчёт стационарного электрического поля в какой-либо области V , ограниченной поверхностью $S[V]$, сводится к нахождению функции U , удовлетворяющей

уравнению (4.99) (с подстановкой заданных функций γ и $\mathbf{E}^{\text{ср}}$) в области V и дополняющим условиям, достаточным для обеспечения единственности его решения.

Формулировку теоремы единственности для уравнения (4.99), указывающей, какие условия для этого достаточны, можно получить, исходя из теоремы единственности, выведенной в § 8 главы первой для уравнения (1.96)₁. Переход к рассматриваемому здесь уравнению (4.99) совершается подстановками:

в уравнение (1.96)₁ и в дальнейшем

$$\Lambda = \gamma = 1/\rho, \quad w^v = -\text{div}(\gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{ср}}); \quad (4.100)$$

в краевое условие III типа согласно (4.22')

$$Q = -I, \quad \Lambda = \gamma = 1/\rho; \quad (4.100')$$

в условия сопряжения (1.110') согласно (4.37) и (4.33)₂

$$\zeta_{12} = \mathcal{E}_{12}^{\text{кнт}}, \quad \phi_{12} = \text{Div}(\gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{ср}}), \quad \Lambda = \gamma = 1/\rho. \quad (4.100'')$$

Особыми поверхностями, на которых задаются условия (1.110') с подстановкой (4.100''), являются: поверхности раздела между средами с различными удельными сопротивлениями и поверхности, на которых заданы контактные э. д. с. В (4.100'') не предусмотрены поверхностные электроды и поверхности с поперечным сопротивлением или продольной проводимостью (см. § 5). Особыми являются также поверхности объёмных электродов, но полем внутри идеально проводящих электродов и электродов с заданным распределением эмиссии мы можем не интересоваться. Что же касается неэквипотенциальных объёмных электродов, на которых не заданы распределения эмиссий, то их поверхности следует рассматривать как поверхности раздела, а собственно электродами считать их точки или идеально проводящие части, к которым подводится питание.

Особыми точками q_{oc} и линиями l_{oc} являются точечные и линейные электроды и электродные диполи.

Для внешней части цепи тока $\mathbf{E}^{\text{ср}} = 0$, $\mathbf{j} = \gamma \cdot \mathbf{E}$ и, следовательно,

$$\text{div}(\gamma \cdot \mathbf{E}) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \text{div} \mathbf{E} = -\frac{1}{\gamma} \cdot (\mathbf{E} \text{ grad } \gamma) \quad (4.101)$$

или

$$(\nabla(\gamma \nabla U)) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \nabla^2 U = -\frac{1}{\gamma} \cdot (\nabla U \nabla \gamma). \quad (4.101')$$

Поэтому поле в области V во внешней части цепи определяется только функцией $\gamma(a)$ и дополняющими условиями. Если в этой области среда однородна по удельной электропроводности γ , то в ней

$$\text{I. rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{II. div } \mathbf{E} = 0, \quad \nabla^2 U = 0. \quad (4.101'')$$

III. Замечания

Дополним приведенные в разделе II § 8 первой главы замечания к теореме единственности уравнения (1.96)₁, частным видом которого является уравнение

(4.101').

1. Если область V , в которой нет электродов и стороннего поля, отделена от остальной части пространства идеально проводящей стенкой (экраном с бесконечно большой продольной проводимостью), то в ней $\mathbf{E}=0$ (см. замечание 1 в § 6 главы третьей). Если идеальный проводник простирается до бесконечности (экран «заземлён»), то на нём и, следовательно, также в области V потенциал $U=0$. Это остаётся справедливым и в том случае, когда область V незамкнутая, и идеально проводящая стенка продолжается до бесконечности.

2. Так как внутри идеальных проводников поле $\mathbf{E}=0$, то они не включаются в область V , в которой определяется поле; их поверхности служат участками границы $S[V]$ этой области. Если идеальный проводник является электродом, то на его поверхности обычно задаётся краевое условие (III типа):

$$\int_{S_{\ominus}} \gamma \cdot \frac{\partial U}{\partial n} dS = -I_{\ominus}, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad (4.102)$$

где n – нормаль, направленная из электрода наружу.

Вместо эмиссии I_{\ominus} может быть известно напряжение поля \mathbf{E} , включённое между электродом и бесконечностью. В этом случае на поверхности электрода задаётся краевое условие (I типа) $U=U_{\ominus}$.

Если идеальный проводник не является электродом, то на его поверхности задаётся условие (III типа):

$$\oint_S \gamma \cdot \frac{\partial U}{\partial n} dS = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad (4.102')$$

Это, в частности, справедливо для идеально проводящих измерительных электродов, не потребляющих тока (когда в измерительной линии ток равен нулю).

3. На фиксированных, поперечных току границах S_1 и S_2 участка C_{12} цепи тока (см. [рис. 4.20](#)) могут быть заданы:

либо условия III типа

$$\int_{S_1} \gamma \cdot \frac{\partial U}{\partial n} dS = -I, \quad \int_{S_2} \gamma \cdot \frac{\partial U}{\partial n} dS = I, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad (4.103)$$

где I – ток в цепи, а n – нормаль; направленная по току от S_1 к S_2 ;

либо условия I типа $U=U_1$ на S_1 , $U=U_2$ на S_2 , которые можно заменить заданием разности потенциалов $U_1-U_2=\mathcal{E}_{12}$ между сечениями S_1 и S_2 , поскольку нас интересует не U , а $\nabla U=-\mathbf{E}$.

4. В проводящей среде, у поверхности изолятора (у поверхности непроводящего включения, у боковой поверхности участка цепи тока, у поверхности раздела земля – воздух), согласно (4.68)₂, является заданным краевое условие II типа: $\partial U/\partial n=0$.

5. Если электроды и нарушения однородности среды находятся в области Θ , ограниченной со всех сторон, то в условии регулярности на бесконечности (2.47) надо подставить вместо массы (заряда) m_{Θ} величину $\frac{\rho}{4\pi} \cdot \sum I_{\ominus}$, где ρ –

удельное электрическое сопротивление среды вне области Θ .

Если на бесконечности среда радиально однородна, т. е. если $\partial\gamma/\partial R=0$ при $R\rightarrow\infty$, где R – радиальная координата сферической системы R, θ, φ с началом в некоторой точке o области Θ , то в (2.47) вместо массы m_Θ следует подставить величину $\frac{1}{4\pi\cdot\gamma_{\text{ср}}}\cdot\sum I_\Theta$, где

$$\gamma_{\text{ср}} = \frac{1}{4\pi\cdot R^2} \oint_S \gamma dS = \frac{1}{4\pi} \oint_S \gamma d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \gamma(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \quad (4.104)$$

– удельная электропроводность среды, усреднённая по сферической поверхности достаточно большого радиуса R ; $d\omega=\sin\theta\cdot d\theta\cdot d\varphi$ – угол видимости элемента dS этой поверхности из точки o .

6. Замечания 5, 6 и 8 в § 6 главы третьей справедливы также для стационарного электрического поля с заменой проницаемости среды её удельной электропроводностью, проводников – идеальными проводниками, зарядов – эмиссиями и уравнения (3.31)₁ – уравнением (4.99).

7. На особой поверхности S согласно (4.100'') функция U должна удовлетворять двум условиям сопряжения

$$U^{(2)} - U^{(1)} = \mathcal{E}_{12}^{\text{кнт}}, \quad \gamma_2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} - \gamma_1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n} = \text{Div}(\gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{ср}}), \quad (4.105)$$

в которых предусмотрено, что в общем случае эта поверхность может быть поверхностью разрыва функций γ и $\gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{ср}}$ и на ней могут действовать контактные э. д. с. Если S – поверхность раздела во внешней части цепи тока и, следовательно, на ней $\text{Div}(\gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{ср}})=0$, $\mathcal{E}_{12}^{\text{кнт}}=0$, то эти условия принимают более простой вид

$$U^{(2)} = U^{(1)}, \quad \gamma_2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} = \gamma_1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n} \left(\text{или } \rho_1 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} = \rho_2 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n} \right), \quad (4.105')$$

т. е. они сводятся к требованию непрерывности функции U и произведения её нормальной производной $\partial U/\partial n$ на удельную электропроводность среды γ .

8. На экранирующей поверхности S должны выполняться условия (4.77) – (4.78').

9. Пусть V – область пространства, занятая участком внешней части цепи, заключённым между двумя её фиксированными поперечными току сечениями S_1 и S_2 , которые *совпадают с границами соседних идеально проводящих участков цепи*. Граница $S[V]$ области V состоит из боковой поверхности S_6 отрезка токового кольца и из его сечений S_1 и S_2 . Согласно сказанному в разделе II и в замечаниях 3 и 4 поле во всех точках области в этом случае полностью определяется заданием формы, размеров и удельного сопротивления (в общем случае как функции точки) участка C_{12} , а также тока I в цепи или напряжения \mathcal{E}_{12} поля \mathbf{E} на участке C_{12} . Из этого следует, что при всяких изменениях на других участках цепи и вне неё не меняются поля \mathbf{E} и \mathbf{j} на участке C_{12} , если, не меняется условие, заданное на S_1 и S_2 , т. е. ток I или

напряжение \mathcal{E}_{12} . Если же значение задаваемой величины I или \mathcal{E}_{12} меняется, то (согласно замечанию 12 в § 8 главы первой) пропорционально меняются абсолютные значения (но не направления) векторов \mathbf{E} и \mathbf{j} во всех точках этого участка и, следовательно, также значение той из величин \mathcal{E}_{12} и I , которая не является заданной.

Отсюда следуют три вывода:

а) источники поля \mathbf{E} , действующего на таком участке C_{12} , не могут находиться вне него;

б) напряжение $\mathcal{E}_{12}=U_1-U_2$ на участке C_{12} должно быть пропорционально току I , т. е. $\mathcal{E}_{12}=R_{12}\cdot I$, где множитель пропорциональности R_{12} определяет формула (4.25);

в) изменение величины \mathcal{E}_{12} или I , задаваемой в качестве краевого условия, не влияет на направления векторов \mathbf{E} и \mathbf{j} в этой области.

Эти выводы справедливы также для всей внешней части цепи тока, для её пространственной части (границы S_A, S_B на рис. 4.20) и для всего токового кольца.

§ 8. ДОПОЛНЕНИЯ К ЧЕТВЁРТОЙ ГЛАВЕ

I. Нарушения однородности среды, не искажающие поля

Представим себе, что среда в области V , о которой шла речь выше (замечание 9 § 7), однородна, т. е. в этой области всюду $\nabla\gamma=0$. В этом случае согласно (4.101'), (4.101'')₃ потенциал U в области V удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 U=0$, а поля \mathbf{E} и \mathbf{j} определяются в ней значением одной из величин I или \mathcal{E}_{12} . Если нарушить однородность среды в области V , то в общем случае потенциал не будет удовлетворять уравнению Лапласа и поля \mathbf{E} и \mathbf{j} при том же значении заданной величины I или \mathcal{E}_{12} станут иными.

Но при некоторых видах нарушений однородности среды в области V будем иметь в ней, как и при отсутствии нарушений однородности среды, потенциал, удовлетворяющий уравнению Лапласа. Это, очевидно, справедливо для нарушений, при которых среда остаётся однородной по направлению поля, так как при этом условия скалярные произведения $(\mathbf{E} \text{ grad } \gamma)=0$, $(\nabla\gamma \nabla U)=0$, и, следовательно, как и в однородной среде, вместо (4.101') получаем (4.101''), Если, наоборот, однородность среды нарушается только по направлению поля, то векторное произведение $[\mathbf{E} \text{ grad } \gamma]=0$ и согласно (4.97'')₁ $\text{rot } \mathbf{j}=0$ и, следовательно, $\mathbf{j}=-\text{grad } U_j$, где U_j – некоторый скаляр, являющийся потенциалом поля вектора \mathbf{j} в области V . Подставляя это выражение для \mathbf{j} во II уравнение поля: $\text{div } \mathbf{j}=0$, получаем $\nabla^2 U_j=0$. Таким образом, если среда в области V однородна по всем направлениям, поперечным полю, то в этой области имеем аналогично (4.101'')

$$\text{rot } \mathbf{j}=0, \quad \text{div } \mathbf{j}=0, \quad \nabla^2 U_j=0.$$

Упрощение уравнения поля в области V , когда среда в ней однородна по направлению поля или по поверхностям, поперечным ему, объясняется отсутствием при этих условиях соответственно источников поля \mathbf{E} или вихрей поля \mathbf{j} в области V так же, как если бы в ней среда была однородна по всем

направлениям. В связи с этим при сохранении однородности среды по направлению поля и постоянстве напряжения \mathcal{E}_{12} между границами S_1 и S_2 области V изменения функции γ в этой области не должны вызывать в ней изменений поля $\mathbf{E} = -\nabla U$ и искажений (изменения направлений) поля $\mathbf{j} = \gamma \cdot \mathbf{E}$, а при сохранении однородности среды по поверхностям, поперечным полю, и постоянстве тока I через поверхности S_1 и S_2 изменения функции γ в области V не должны вызывать в ней изменений поля \mathbf{j} и искажений поля $\mathbf{E} = \rho \cdot \mathbf{j}$. В обоих случаях несоблюдение постоянства величин \mathcal{E}_{12} и I не приводит к искажениям полей \mathbf{E} и \mathbf{j} .

В отношении разрывных нарушений однородности среды сказанное выше означает, что поверхности раздела, параллельные полю, при постоянстве значения \mathcal{E}_{12} не должны вызывать изменений поля \mathbf{E} , а поверхности раздела, нормальные к направлению поля, – при постоянстве значения I не должны приводить к изменениям поля \mathbf{j} . Что же касается искажений (изменения направлений) полей \mathbf{E} и \mathbf{j} , то они под влиянием поверхностей раздела, только параллельных полю, либо только нормальных к нему, не должны появиться нигде.

Однако в общем случае изменение среды в каком-либо месте сопряжено с нарушениями её однородности по направлению поля и в поперечных ему направлениях. Действительно, допустим, например, что в области V была однородная среда с удельной электропроводностью γ_0 и что эта среда заменена средой с удельной электропроводностью γ внутри поперечного отрезка токовой трубки (определяемой по полю, существовавшему до замены среды), занимающего область V' , которая является частью области V и ограничивается боковой поверхностью S'_6 и основаниями (поперечными сечениями трубки) S'_1 и S'_2 . В этом случае получаются одновременно параллельная полю поверхность раздела S'_6 и поперечные ему поверхности раздела S'_1 и S'_2 . Поэтому возникают изменения полей \mathbf{E} и \mathbf{j} (и их искажения).

Но в двух случаях это осложнение отпадает: когда отрезок токовой трубки взят на всём протяжении автономного участка C_{12} или когда он является отрезком всего токового кольца.

Если в первом из этих случаев остаётся постоянным напряжение \mathcal{E}_{12} , а во втором – ток I , то краевым условиям и условиям сопряжения мы удовлетворим, допустив, что во всей области не меняется поле \mathbf{E} в первом случае и поле \mathbf{j} – во втором. В более общем случае могут меняться обе величины – \mathcal{E}_{12} и I , но только одну из них можно задать произвольно, так как ею определяются поля \mathbf{E} и \mathbf{j} на заданном участке C_{12} и, следовательно, также вторая из этих величин. Иначе говоря, отношение \mathcal{E}_{12}/I не является произвольным; оно представляет собой сопротивление R_{12} участка цепи, и его изменение определяется изменением функции γ в пределах этого участка. Его можно рассматривать как сопротивление параллельного соединения в первом случае и как сопротивление последовательного соединения – во втором.

Очевидно, что всё сказанное здесь будет, в частности, справедливо, если в

качестве участка C_{12} возьмём всю пространственную часть цепи тока, заключённую между двумя идеально проводящими или точечными электродами, или же (в случае уединённого электрода) между одним таким электродом и бесконечно удалённой поверхностью.

Сказанное также справедливо, когда размеры поперечного сечения цепи неограничены и участок C_{12} представляет собой поперечный полю слой, замкнутый или продолжающийся до бесконечности.

Представим себе область V в виде тонкого слоя. Нетрудно убедиться, что если $\gamma < \gamma_0$ и слой параллелен полю или же $\gamma > \gamma_0$ и слой нормален полю, то поле искажается только у краев слоя. Экранирующие поверхности (о которых шла речь в § 5) при произвольном их расположении могут оказать на распределение поля сильное влияние. Но экранирующая поверхность (включая её края) не влияет на поле, если она имеет поперечное сопротивление T^p и параллельна первичному полю или она имеет продольную проводимость S^y и нормальна полю. Это справедливо даже при $T^p = \infty$ и $S^y = \infty$.

Предельно тонкую нить с повышенным удельным сопротивлением ρ можно всегда рассматривать как предельно узкую полоску параллельной полю поверхности с поперечным сопротивлением T^p . Следовательно, даже при бесконечно большом удельном сопротивлении нити (тонкий кабель в изоляции) и при произвольном её расположении она не может оказывать значительное влияние на распределение поля \mathbf{E} .

II. Аналогия со статическим полем

Ниже показана аналогия между стационарным электрическим полем, создаваемым с помощью идеально проводящих электродов при $\mathbf{E}^{\text{стп}} = 0$ (левая колонка), и электростатическим полем, создаваемым в диэлектрике зарядами проводников при отсутствии в диэлектрике (вне проводников), свободных зарядов, т. е. при $\delta_{\text{свб}} = 0$ (правая колонка).

Линии, соединяющие электроды и содержащие сторонние напряжения, мысленно исключаются из рассматриваемого пространства.

<i>Стационарное электрическое поле</i>	<i>Электростатическое поле</i>
Источники поля находятся на поверхностях электродов и в местах нарушения однородности среды, где $(\mathbf{E} \nabla \gamma) \neq 0$	Источники поля находятся на поверхностях проводников и в местах нарушения однородности среды, где $(\mathbf{E} \nabla \epsilon) \neq 0$
В идеальном проводнике поле $\mathbf{E} = 0$. Вектор плотности тока $\mathbf{j} = \gamma \cdot \mathbf{E}$, $\text{div } \mathbf{j} = 0$, $(\nabla (\gamma \nabla U) = 0$	В проводнике поле $\mathbf{E} = 0$. Вектор электрической индукции $\mathbf{D} = \epsilon_a \cdot \mathbf{E}$, $\text{div } \mathbf{D} = 0$, $(\nabla (\epsilon \nabla U) = 0$
Эмиссия электрода $I_{\text{э}} = \oint_{S_{\text{э}}} (\mathbf{j} \, d\mathbf{S})$	Свободный заряд проводника $e_{\text{свб}} = \oint_S (\mathbf{D} \, d\mathbf{S})$

Эта аналогия позволяет переходить от формул, справедливость которых доказана для одного из этих полей, к соответствующим формулам для другого поля. В частности, это даёт возможность от сказанного в § 7 главы третьей о взаимном влиянии проводников перейти к рассмотрению взаимного влияния электродов.

Допустим, что в пространстве, заполненном средой, в общем случае неоднородной, имеется n идеально проводящих электродов \mathcal{E}_k с эмиссиями I_k ($k=1, 2, \dots, n$). Некоторые из этих эмиссий могут быть равны нулю; соответствующие электроды фактически являются обыкновенными идеальными проводниками.

Пусть U_k – потенциалы электродов при их эмиссиях I_k и при заданной в пространстве функции γ . Каждой совокупности значений I_k соответствует определённая совокупность значений U_k . Представим себе, что U'_k, Γ'_k и U''_k, Γ''_k – две возможные совокупности значений U_k и I_k . В соответствии с (3.57)

$$\sum U'_k \cdot \Gamma''_k = \sum U''_k \cdot \Gamma'_k \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (4.106)$$

III. Принцип взаимности питающих и измерительных электродов

Пусть $\Gamma'_1 = \Gamma'_2 = \dots = \Gamma'_m = 0$, $\Gamma''_{m+1} = \Gamma''_{m+2} = \dots = \Gamma''_n = 0$. Этот случай имеем, например, когда речь идёт о двух вариантах применения электродов:

1) электроды $1, 2, \dots, m$ являются измерительными, а электроды $m+1, m+2, \dots, n$ – токовыми;

2) электроды $1, 2, \dots, m$ являются токовыми, а электроды $m+1, m+2, \dots, n$ – измерительными. Для этого случая из (4.106) получаем соотношение

$$\sum_{k=1}^{k=m} U'_k \cdot \Gamma''_k = \sum_{k=m+1}^{k=n} U''_k \cdot \Gamma'_k, \quad (4.107)$$

являющееся выражением принципа взаимности питающих и измерительных (идеально проводящих) электродов.

Пример. Имеем три пары электродов: AB, MN и PQ . Питая электроды AB током I_{AB} , получаем разности потенциалов $U_M - U_N$ и $U_P - U_Q$, а питая электроды MN и PQ токами I_{MN} и I_{PQ} – разность потенциалов $U_A - U_B$. Направления токов (в земле) соответствуют порядку индексов при I . Применим вместо $k=1 \div 6$ индексы A, B, M, N, P, Q (соответственно). Положив

$\Gamma'_A = -\Gamma'_B = I_{AB}$, $\Gamma'_M = \Gamma'_N = \Gamma'_P = \Gamma'_Q = \Gamma''_A = \Gamma''_B = 0$, $\Gamma''_M = -\Gamma''_N = I_{MN}$, $\Gamma''_P = -\Gamma''_Q = I_{PQ}$ и отбросив штрихи в обозначениях $U'_A, U'_B, U''_M, U''_N, U''_P, U''_Q$, получим из (4.107)

$$(U_A - U_B) \cdot I_{AB} = (U_M - U_N) \cdot I_{MN} + (U_P - U_Q) \cdot I_{PQ}. \quad (4.107')$$

При $I_{PQ} = c \cdot I_{MN}$ ($c = \text{const}$) имеем

$$(U_A - U_B) / I_{MN} = (U_M - U_N + c \cdot U_P - c \cdot U_Q) / I_{AB}, \quad (4.107'')$$

а при $c=0$, т. е. в случае двух пар электродов AB и MN ,

$$(U_A - U_B) / I_{MN} = (U_M - U_N) / I_{AB}. \quad (4.107''')$$

Формула (4.107) в отличие от (4.106) имеет смысл не только для объёмных, но также для необъёмных электродов. Справедливость формулы (4.107) для

случая точечных электродов в неограниченной однородной среде легко доказать, исходя из выражения (4.94)₁ для потенциала поля точечного электрода в такой среде.

IV. Сопротивление и ёмкость электрода

Допустим теперь, что среда, в которой находятся идеально проводящие электроды, всюду однородна. В этом случае в качестве статического аналога стационарного поля можно взять поле, создаваемое в вакууме зарядами, находящимися на проводниках. При этом свободному заряду проводника (совпадающему при $\varepsilon=1$ с его полным зарядом) согласно (2.95'') соответствует в стационарном поле заряд электрода $e_{\mathcal{E}}=\varepsilon_0 \cdot \rho \cdot I_{\mathcal{E}}$.

Из этого следует, что для стационарного поля, создаваемого зарядами идеально проводящих электродов в неограниченной однородной среде, справедливы равенства (3.57), (3.58), в которых надо считать $e_k=\varepsilon_0 \cdot \rho \cdot I_k$.

В частности, для случая уединённого электрода по аналогии с (3.59) имеем

$$C_{\mathcal{E}} = \frac{e_{\mathcal{E}}}{U_{\mathcal{E}}} = \varepsilon_0 \cdot \rho \cdot \frac{I_{\mathcal{E}}}{U_{\mathcal{E}}}. \quad (4.108)$$

Сравнивая (4.108) с (4.90)₁, получаем соотношение

$$R_{\mathcal{E}} \cdot C_{\mathcal{E}} = \varepsilon_0 \cdot \rho. \quad (4.108')$$

между сопротивлением (заземления) $R_{\mathcal{E}}$ уединённого электрода и ёмкостью $C_{\mathcal{E}}$ такого же уединённого проводника в вакууме. Это соотношение позволяет воспользоваться результатами расчётов ёмкостей проводников различной формы для определения сопротивлений электродов такой же формы. В более общем случае группы идеально проводящих электродов (в неограниченной однородной среде) можно получить формулы, полезные при расчёте их сопротивления (в группе), исходя из равенств (3.57), (3.58).

V. О влиянии диэлектрической проницаемости

Возможность определения стационарного поля уравнениями (4.101) – (4.101''), не содержащими диэлектрической проницаемости ε , может показаться странной, так как изменение ε вызывает изменение связанных источников поля \mathbf{E} . Но посмотрим, как зависят источники поля от ε , γ , \mathbf{E} и $\mathbf{E}^{\text{св}}$. Согласно (4.49) – (4.51) объёмная плотность полных зарядов

$$\delta = \delta_{\text{плн}} = -\varepsilon_0 \cdot \rho \cdot [(\mathbf{E} \nabla \gamma) + \text{div}(\gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{св}})].$$

Следовательно, в соответствии с (3.33') объёмные плотности свободных и связанных зарядов

$$\begin{aligned} \delta_{\text{свб}} &= \varepsilon_0 (\mathbf{E} \nabla \varepsilon) - \varepsilon_a \cdot \rho \cdot [(\mathbf{E} \nabla \gamma) + \text{div}(\gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{св}})], \\ \delta_{\text{свз}} &= -\varepsilon_0 \cdot (\mathbf{E} \nabla \varepsilon) + (\varepsilon_a - \varepsilon_0) \cdot \rho \cdot [(\mathbf{E} \nabla \gamma) + \text{div}(\gamma \cdot \mathbf{E}^{\text{св}})], \end{aligned}$$

Таким образом, $\delta_{\text{плн}}$ не зависит от диэлектрической проницаемости ε , а $\delta_{\text{свб}}$ и $\delta_{\text{свз}}$ зависят от неё. Из этого следует, что влияние проницаемости ε на $\delta_{\text{свз}}$ компенсируется её влиянием на $\delta_{\text{свб}}$.

Перейдём к выражениям для плотностей поверхностных зарядов во внешней части цепи тока: Согласно (4.49) – (4.51) и (3.34')

$$\sigma_{\text{плн}} = \varepsilon_0 \cdot \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_{\text{ср}}} \cdot E_n^{\text{ср}}, \quad \sigma_{\text{плн}} = \frac{\sigma_{\text{свб}}}{\varepsilon_{\text{ср}}} + \varepsilon_0 \cdot \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_{\text{ср}}} \cdot E_n^{\text{ср}},$$

следовательно,

$$\sigma_{\text{свб}} = \varepsilon_0 \cdot \left[(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \frac{\varepsilon_{\text{ср}}}{\gamma_{\text{ср}}} \cdot (\gamma_1 - \gamma_2) \right] \cdot E_n^{\text{ср}}, \quad \sigma_{\text{свз}} = \varepsilon_0 \cdot \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \frac{1 - \varepsilon_{\text{ср}}}{\gamma_{\text{ср}}} \cdot (\gamma_1 - \gamma_2) \right] \cdot E_n^{\text{ср}}.$$

Подставляя сюда $(\gamma_1 - \gamma_2)/\gamma_{\text{ср}} = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_{\text{ср}}$, получаем

$$\sigma_{\text{плн}} = \varepsilon_0 \cdot \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_{\text{ср}}} \cdot E_n^{\text{ср}}, \quad \sigma_{\text{свб}} = \varepsilon_0 \cdot \left[(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \frac{\varepsilon_{\text{ср}}}{\rho_{\text{ср}}} \cdot (\rho_2 - \rho_1) \right] \cdot E_n^{\text{ср}},$$

$$\sigma_{\text{свз}} = \varepsilon_0 \cdot \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \frac{1 - \varepsilon_{\text{ср}}}{\rho_{\text{ср}}} \cdot (\rho_2 - \rho_1) \right] \cdot E_n^{\text{ср}}. \quad (4.109)$$

Применим полученные формулы к поверхностям S_A и S_B идеально проводящих электродов A и B в цепи тока с двумя питающими электродами (рис. 4.20). Полагая для S_A $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=\varepsilon$, $\rho_1=0$, $\rho_2=\rho$, $E_n^{(1)}=0$, $E_n^{(2)}=E=\rho \cdot j$, получаем

$$\sigma_{\text{плн}} = \varepsilon_0 \cdot E = \varepsilon_0 \cdot \rho \cdot j, \quad \sigma_{\text{свб}} = \varepsilon_a \cdot \rho \cdot j, \quad \sigma_{\text{свз}} = (\varepsilon_0 - \varepsilon_a) \cdot \rho \cdot j.$$

То же, но со знаком « \rightarrow » получаем для поверхности S_B . При $\varepsilon=1$ $\sigma_{\text{плн}} = \sigma_{\text{свб}} = \pm \varepsilon_0 \cdot \rho \cdot j$, $\sigma_{\text{свз}} = 0$. Следовательно, при изменении диэлектрической проницаемости окружающей электроды среды от 1 до ε плотности $\sigma_{\text{свб}}$ и $\sigma_{\text{свз}}$ зарядов электродов претерпевают изменения $\mp (\varepsilon_0 - \varepsilon_a) \cdot \rho \cdot j$ и $\pm (\varepsilon_0 - \varepsilon_a) \cdot \rho \cdot j$, а плотность $\sigma_{\text{плн}}$ не меняется. При этом постоянство сопротивления R и э. д. с. в цепи предотвращают изменение тока I в ней и, следовательно, полей \mathbf{j} и $\mathbf{E} = \rho \cdot \mathbf{j}$ в земле, а постоянство поля \mathbf{E} , обеспечивает неизменность полных плотностей $\sigma_{\text{плн}}$ зарядов электродов A и B . Необходимые же для этого приращения свободных зарядов на A и B получаются за счёт сторонней энергии, которая должна быть затрачена для этого во внутренней части цепи. Аналогичное происходит в конденсаторе при увеличении проницаемости ε среды, находящейся между его обкладками. При постоянном напряжении на нём (на его обкладках) получают приращения свободных зарядов и такие же, но с обратными знаками, приращения связанных зарядов.

VI. Об индуцированных зарядах в электрически анизотропной среде

Как показано выше, во внешних частях цепей электрического тока в изотропных средах индуцированные заряды могут существовать в местах нарушения однородности среды по удельной электропроводности $\gamma=1/\rho$. Объёмную (δ) и поверхностную (σ) плотности таких зарядов определяют выражения: $\delta = \delta_{\text{плн}} = \varepsilon_0 \cdot \text{div } \mathbf{E}$, $\sigma = \sigma_{\text{плн}} = \varepsilon_0 \cdot (E_n^{(2)} - E_n^{(1)})$, где n – нормаль к особой поверхности S (поверхности разрыва нормальной к S компоненты поля \mathbf{E}), а $E_n^{(1)}$ и $E_n^{(2)}$ – значения нормальной к S компоненты E_n поля \mathbf{E} в лежащих (на бесконечно-малом расстоянии L_{12}) по разные стороны поверхности S "соседних" точках «1» и «2». Плотности объёмных и поверхностных зарядов в изотропной среде можно выразить через удельную электропроводность такой среды и напряжённость \mathbf{E} электрического поля: $\delta = -(\varepsilon_0/\gamma) \cdot (\text{grad } \gamma \cdot \mathbf{E})$, $\sigma = 2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \gamma_{12} \cdot E_n^{\text{ср}}$, где $\gamma_{12} = (\gamma_1 - \gamma_2)/(\gamma_1 + \gamma_2)$ – коэффициент контрастности

границы двух сред, а $E_n^{cp}=(E_n^{(1)}+E_n^{(2)})/2$ – среднее значение нормальной к S компоненты поля \mathbf{E} в точках «1» и «2». Из этих выражений для плотностей δ и σ следует, что во внешних частях цепей электрического тока в изотропной проводящей среде электрические заряды могут существовать лишь в местах нарушения однородности среды по γ . Ниже затронем вопрос о том, где в электрически анизотропной среде существуют электрические заряды – источники стационарного электрического поля \mathbf{E} .

В анизотропной среде объёмные заряды могут существовать и в том случае, когда среда – однородна. В такой среде закон Ома в дифференциальной форме: $\mathbf{j}=\hat{\gamma}\cdot\mathbf{E}$, где $\hat{\gamma}$ – тензор удельной электропроводности, который в декартовых координатах определяет выражение (4.14"). Если ось Z декартовых координат направить по оси анизотропии n (см. рис. 4.9), то из выражения (4.15") получаем

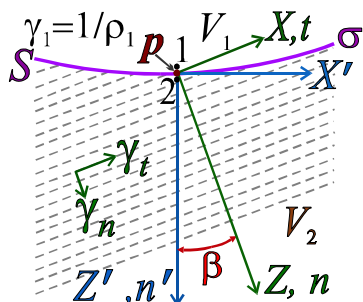
$$j_x=\gamma_t\cdot E_x, \quad j_y=\gamma_t\cdot E_y, \quad j_z=\gamma_n\cdot E_z. \quad (4.110)$$

В этом случае уравнения $\operatorname{div}\mathbf{E}=\delta/\varepsilon_0$, $\operatorname{div}\mathbf{j}=0$ в декартовых координатах принимают вид:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\delta}{\varepsilon_0}, \quad \gamma_t \cdot \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = 0,$$

где $\lambda=(\gamma_t/\gamma_n)^{1/2}=(\rho_n/\rho_t)^{1/2}$ – коэффициент анизотропии. В анизотропной среде $\lambda>1$, а в изотропной – $\lambda=1$.

Из этих уравнений следует, что объёмная плотность зарядов определяет выражение



$$\delta = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \frac{\partial E_z}{\partial z} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \frac{\partial E_n}{\partial n}, \quad (4.111)$$

согласно которому, индуцированные объёмные заряды существуют в однородной анизотропной среде, если компонента E_n поля \mathbf{E} по оси анизотропии n меняется по направлению этой оси.

Рис. 4.22.

К выражению (4.112)

Поверхностную плотность σ зарядов, индуцированных на границе двух изотропных сред, определяет выражение (4.54). Можно показать ([Каринский, 2018]), что плотность зарядов, индуцированных на границе S между изотропной средой с $\gamma=\gamma_1$ и анизотропной средой с удельными электропроводностями γ_n и γ_t ,

$$\sigma(p) = 2\varepsilon_0 \cdot \left[\frac{\gamma_1 - \gamma_n \cdot \cos^2 \beta - \gamma_t \cdot \sin^2 \beta}{\gamma_1 + \gamma_n \cdot \cos^2 \beta + \gamma_t \cdot \sin^2 \beta} \cdot E_{z'}^{cp} - \frac{(\gamma_t - \gamma_n) \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta}{\gamma_1 + \gamma_n \cdot \cos^2 \beta + \gamma_t \cdot \sin^2 \beta} \cdot E_{x'} \right], \quad (4.112)$$

где $E_{z'}^{cp} = (E_{z'}^{(1)} + E_{z'}^{(2)})/2$, β – угол между осью анизотропии n (и осью Z) и нормалью n' к границе S (и осью Z') (рис. 4.22).

Отметим следующее. Согласно (4.54), плотность σ поверхностных зарядов на границе S изотропных сред зависит от нормальной к этой границе

компоненты поля \mathbf{E} и не зависит от касательных к S компонент этого поля. То есть в этом случае единственной «активной» компонентой поля \mathbf{E} , индуцирующей на S поверхностные заряды, является нормальная к S компонента. Но из выражения (4.112) следует, что плотность σ на границе анизотропной и изотропной сред в общем случае зависит не только от нормальной к S компоненты E_z , но и от тангенциальной компоненты E_x , на границе анизотропной среды.

Из (4.112) в двух частных случаях получаем следующие выражения:

$$\text{при } \beta = 0 \quad \sigma(p) = 2\varepsilon_0 \cdot \frac{\gamma_1 - \gamma_n}{\gamma_1 + \gamma_n} \cdot E_{n'}^{\text{ср}} = 2\varepsilon_0 \cdot \frac{\rho_n - \rho_1}{\rho_1 + \rho_n} \cdot E_{n'}^{\text{ср}}, \quad (4.112')$$

$$\text{при } \beta = \pi/2 \quad \sigma(p) = 2\varepsilon_0 \cdot \frac{\gamma_1 - \gamma_t}{\gamma_1 + \gamma_t} \cdot E_{n'}^{\text{ср}} = 2\varepsilon_0 \cdot \frac{\rho_t - \rho_1}{\rho_1 + \rho_t} \cdot E_{n'}^{\text{ср}}. \quad (4.112'')$$

Согласно (4.112'), если ось анизотропии n направлена по нормали n' к границе S между изотропной и анизотропной средами ($\beta=0$), то на плотность зарядов σ влияет только один электрический параметр анизотропной среды – поперечное удельное электрическое сопротивление $\rho_n=1/\gamma_n$. Если же у границы S направления оси анизотропии n и нормали n' к S – взаимно ортогональны ($\beta=\pi/2$), то, в соответствии с (4.112''), на плотность σ влияет продольное удельное электрическое сопротивление $\rho_t=1/\gamma_t$ анизотропной среды.

VII. Об источниках стационарного электрического поля

Стационарное электрическое поле \mathbf{E} определяет система уравнений (4.98) или эквивалентное ей уравнение (4.99). Все эти уравнения не содержат величин, характеризующих в явном виде распределение электрических зарядов в пространстве. Для расчёта стационарного поля (\mathbf{E} , \mathbf{j}) в области V достаточно знать функции $\mathbf{E}^{\text{ср}}(q)$, $\gamma(q)$ и условия на поверхности $S[V]$. При этом можно полностью отвлечься от существования зарядов, являющихся источниками изучаемого поля \mathbf{E} . В связи с этим обычно при изучении стационарного поля этим зарядам, их распределению в пространстве и зависимости поля от них не уделяют внимания и часто совсем забывают об их существовании.

Аналогичное отмечаем в отношении зависимых (зависящих от поля \mathbf{E} и среды) источников электростатического (а также – и магнитостатического) поля; вместо этих источников задаётся проницаемость среды. Но в электростатике (и в магнитостатике) обычно в той или иной мере интересуются также полем в областях пространства, занятых свободными зарядами или постоянными магнитами. Поэтому хотя бы независимым источникам поля приходится уделять внимание.

Что же касается стационарного поля, то обычно поле \mathbf{E} во внутренней части цепи не рассматривают, и вместо поля $\mathbf{E}^{\text{ср}}$ задают напряжение $\mathcal{E}^{\text{ср}}$. Формально можно вместо $\mathbf{E}^{\text{ср}}$ рассматривать сторонний ток с плотностью $\mathbf{j}^{\text{ср}}=\gamma_i \cdot \mathbf{E}^{\text{ср}}$. Поэтому часто понятие о зарядах полностью исключают при рассмотрении стационарного поля (потом при переходе к переменному электромагнитному полю приходится опять вспомнить о зарядах в связи с

соотношением $\operatorname{div} \mathbf{j} = -\partial \delta_{\text{свб}} / \partial t$).

В настоящей книге, вопреки традиции, всем источникам стационарного и статического поля уделяется много внимания по следующим методологическим мотивам.

С познавательной точки зрения выпадение понятия о зарядах из поля зрения учащегося на "интервале стационарного поля" между изучением статического поля \mathbf{E} и переменного электромагнитного поля образует неуместный пробел. Опыт показал, что возникающие на этой почве недоразумения затрагивают далеко не только учащихся.

Исключение из рассмотрения физической сути – порождения поля зарядами – было бы явным изъяном в настоящей книге, в которой теория различных полей рассматривается в тесной логической и физической взаимосвязи, в их последовательном развитии и составляет одну цельную дисциплину.

При изучении электрического тока в цепи, полностью пространственной и заключённой в земле, назревает необходимость интересоваться полем не только во внешней части цепи, но также в её внутренней части, т. е. в области пространства, в которой действует стороннее поле, например фильтрационная э. д. с.

С усложнением задач теории разведочной геофизики всё большее значение приобретает, например, метод интегральных уравнений. Такие уравнения, позволяющие свести определение поля к расчёту его возбудителей (зарядов, порождающих поле), отличаются особой наглядностью. Формально можно вместо зарядов (на поверхностях раздела) ввести фиктивные поверхностные источники поля \mathbf{j} . Но это – искусственное удаление от физической сути дела.

Опыт показал, что представление о распределении зарядов, создающих поле, очень полезно для понимания и развития электрических (а также – и электромагнитных) методов разведочной геофизики.

Глава пятая. Магнитное поле постоянного тока

§ 1. ТОК В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В магнитном поле

(Имеется в виду поле \mathbf{B} , создаваемое намагниченными телами (как сказано в главе третьей), а также токами, о чём будет идти речь в следующих параграфах этой главы.)

на элемент длины dl линейного тока I , содержащий точку q , действует сила $d\mathbf{F}$, определяемая законом Ампера:

$$d\mathbf{F}(q) = I \cdot [d\mathbf{l} \mathbf{B}], \quad (5.1)$$

где $d\mathbf{l}$ – вектор, направленный по току; \mathbf{B} – вектор магнитной индукции в точке q . Согласно (5.1) $d\mathbf{F} \perp d\mathbf{l}$, $d\mathbf{F} \perp \mathbf{B}$ и векторы $d\mathbf{l}$, \mathbf{B} , $d\mathbf{F}$ образуют правую тройку

(рис. 5.1, а).

Абсолютная величина

$$dF = I \cdot dl \cdot B \cdot \sin(\angle d\mathbf{l}, \mathbf{B}).$$

Если l – (замкнутый)

контур линейного тока I (рис. 5.1, б),

то на его элементы dl

согласно (5.1) действуют силы

$d\mathbf{F}$, которые

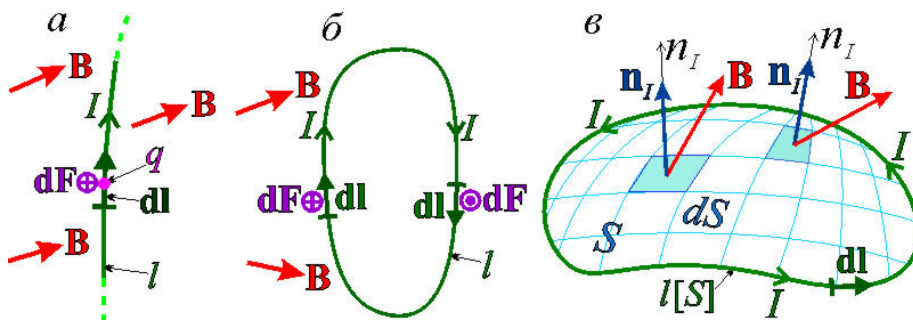


Рис. 5.1.

К закону Ампера.

На рис. "а", "б" векторы \mathbf{B} и линии l лежат в плоскости рисунка

образуют главный вектор

$$\mathbf{F} = \oint_l d\mathbf{F} = I \cdot \oint_l [d\mathbf{l} \mathbf{B}] \quad (5.1')$$

и главный момент (вращения) относительно какой-либо точки o :

$$\mathbf{M}_{\text{вр}} = \oint_l [\mathbf{L}_{oq} d\mathbf{F}] = I \cdot \oint_l [\mathbf{L}_{oq} [d\mathbf{l} \mathbf{B}]] = I \cdot \oint_l (\mathbf{L}_{oq} \mathbf{B}) d\mathbf{l} - I \cdot \oint_l \mathbf{B} (\mathbf{L}_{oq} d\mathbf{l}). \quad (5.2)$$

I. Токовый контур в однородном магнитном поле

Рассмотрим действие, оказываемое на токовый контур однородным (в пределах области V , содержащей контур l) полем \mathbf{B} . В этом случае

$$\mathbf{F} = -I \cdot \left[\mathbf{B} \oint_l d\mathbf{l} \right] = 0, \quad (5.1'')$$

так как здесь интеграл представляет собой сумму векторов $d\mathbf{l}$, образующих замкнутый многоугольник.

Согласно (1.41')₂, $\oint_{l[S]} d\mathbf{l} = \int_S [d\mathbf{S} \nabla 1] = 0$.

Что же касается вращающего момента $\mathbf{M}_{\text{вр}}$, то в случае однородного поля \mathbf{B}

$$\oint_{l[S]} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{L}_{oq} d\mathbf{l}) = \mathbf{B} \cdot \oint_{l[S]} (\mathbf{L}_{oq} d\mathbf{l}) = \mathbf{B} \cdot \int_S (\text{rot } \mathbf{L}_{oq} d\mathbf{S}) = 0,$$

так как согласно (1.127'') $\text{rot } \mathbf{L}_{oq} = 0$ (где \mathbf{L}_{oq} – радиус-вектор). Таким образом, в соответствии с (1.41')₂ из (5.2) получаем

$$\mathbf{M}_{\text{вр}} = I \cdot \oint_{l[S]} (\mathbf{L}_{oq} \mathbf{B}) d\mathbf{l} = I \cdot \int_S \left[d\mathbf{S} \overset{q}{\nabla} (\mathbf{L}_{oq} \mathbf{B}) \right], \quad d\mathbf{S} = \mathbf{n}_I \cdot dS,$$

где \mathbf{n}_I – нормаль к поверхности S , образующая с током I по контуру $l[S]$ правовинтовую систему, а \mathbf{n}_I – безразмерный единичный вектор по направлению \mathbf{n}_I (рис. 5.1, в). Но так как (в рассматриваемом случае) поле \mathbf{B} – однородно, то согласно (1.127''') $\overset{q}{\nabla} (\mathbf{L}_{oq} \mathbf{B}) = \mathbf{B}$, следовательно,

$$\mathbf{M}_{\text{вр}} = I \cdot \int_S [d\mathbf{S} \mathbf{B}] = -I \cdot \left[\mathbf{B} \int_S d\mathbf{S} \right] \quad \text{или} \quad \mathbf{M}_{\text{вр}} = [\mathbf{M} \mathbf{B}], \quad (5.2')$$

где

$$\mathbf{M} = I \cdot \int_S d\mathbf{S} = I \cdot \int_S \mathbf{n}_I dS. \quad (5.3)$$

В случае плоского контура

$$\mathbf{M}_{\text{вр}} = I \cdot (\mathbf{S} \mathbf{B}) = I \cdot S \cdot (\mathbf{n}_I \mathbf{B}), \quad \mathbf{M} = I \cdot \mathbf{S} = \mathbf{n}_I \cdot I \cdot S, \quad (5.4);$$

где S – площадь участка плоскости, ограничиваемая контуром. В этом случае вектор $\mathbf{M}_{\text{вр}}$ лежит в плоскости контура.

II. Магнитные моменты токов и магнитов

Имеется в виду любая намагниченность: \mathbf{J} , $\mathbf{J}^{\text{вр}}$ или \mathbf{J}^0 .

Вектор \mathbf{M} называют магнитным моментом тока.

В соответствии с (5.3) единица магнитного момента тока равна $1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$.

Согласно (5.4) момент \mathbf{M} образует с током I правовинтовую систему. Контур тока $l[S]$ и опирающуюся на него поверхность S будем часто отмечать нижним индексом I . Поверхность S_I назовём поверхностью тока. На ней лицевую сторону выберем так, чтобы наблюдатель, смотрящий по направлению момента \mathbf{M} (и нормали \mathbf{n}_I), видел обратную сторону поверхности S_I , а ток I – ориентированным по ходу часовой стрелки.

Согласно (5.2')₂ вращающий момент $\mathbf{M}_{\text{вр}}$ нормален к плоскости, в которой лежат векторы \mathbf{M} и \mathbf{B} , и стремится повернуть контур так, чтобы уменьшить угол (\mathbf{M}, \mathbf{B}) между их направлениями. При угле $(\mathbf{M}, \mathbf{B}) = 0$, т. е. когда момент направлен по полю \mathbf{B} , момент $\mathbf{M}_{\text{вр}} = 0$. Это положение равновесия поле стремится придать контуру. Вектор $\mathbf{M}_{\text{вр}}$ обращается в нуль также при угле $(\mathbf{M}, \mathbf{B}) = \pi$. Но при этом равновесие контура является неустойчивым.

Сравнивая (5.4) с (3.22''')₃, видим, что в магнитном поле на контур l с током I действует такой же вращающий момент, какой действовал бы в этом же поле на однородный магнитный листок (двойной магнитный слой) с плотностью дипольных моментов $\eta = I$ с положительной обкладкой, соответствующей лицевой стороне поверхности тока, и с краевой линией, совпадающей с контуром l . Таким образом, замкнутый линейный ток I эквивалентен опирающемуся на его контур однородному магнитному листку

с плотностью дипольных моментов

$$\eta = I. \quad (5.5)$$

Элементарный (элементарных размеров) токовый контур имеет дипольный магнитный момент

$$d\mathbf{M} = I \cdot d\mathbf{S}, \quad (5.3')$$

где dS – площадка, ограничиваемая этим контуром. Элементарный токовый контур эквивалентен элементарному магнитному диполю, т. е. диполю с магнитным моментом элементарной величины.

Формула (5.2')₂ применима также к совокупности токов, причём вместо магнитного момента тока следует брать магнитный момент совокупности, токов, равный сумме их магнитных моментов. Примером такой совокупности токов является соленоид (рис. 5.2, б). Если h – длина соленоида, S – площадь его витка и N – число витков, то его магнитный момент

$$M = k \cdot h \cdot S \cdot I = k \cdot V \cdot I, \quad (5.6)$$

где $k = N/h$ – число витков на единицу длины соленоида.

Виткам соленоида соответствует $k \cdot h = N$ магнитных листков, которые

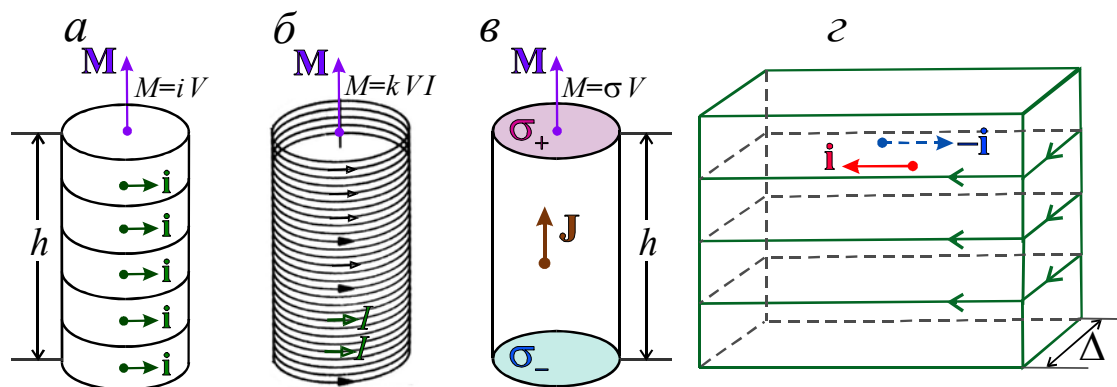


Рис. 5.2.

Эквивалентность цилиндра (в), однородно намагниченного по направлению образующей, такому же по форме и размерам соленоиду (б) и поверхностному току (а) на такой же цилиндрической поверхности, по её направляющей.

Двойной поверхностный ток (г) эквивалентен продольно намагниченной поверхности

согласно замечанию 7 § 2 главы третьей можно заменить дисками толщиной $h/N = 1/k$. Совокупность этих дисков образует однородный цилиндрический магнит с моментом, направленным по его образующей (рис. 5.2, в). Сравнивая (5.6) с (3.23), видим, что соленоид эквивалентен такому же как он по форме и размерам цилиндру с однородной намагниченностью

$$J = k \cdot I \quad (5.7)$$

по направлению образующей. На основаниях такого цилиндра находятся поверхностные магнитные массы с плотностью

$$\sigma = \pm J = \pm k \cdot I. \quad (5.8)$$

Представим себе прямой круговой цилиндр, на боковой поверхности которого имеется поверхностный ток (см. (4.7') и рис. 4.7) по окружностям цилиндра с одинаковой по абсолютной величине i плотностью \mathbf{i} и с

одинаковой ориентацией (по окружностям) во всех точках этой поверхности (рис. 5.2, а).

Величина поверхностного тока по цилиндрическому кольцу высотой dh , заключённому между двумя поперечными сечениями цилиндра, равна произведению $i \cdot dh$. Согласно (5.4) магнитный момент этого кольцевого тока равен $i \cdot S \cdot dh$, а весь поверхностный ток имеет магнитный момент

$$M = i \cdot S \cdot h = i \cdot V. \quad (5.6')$$

Следовательно, этот поверхностный ток эквивалентен соленоиду, равномерно навитому на такой же цилиндр с плотностью намотки k и с током

$$I = i/k. \quad (5.8')$$

Учитывая сказанное выше о соленоиде и намагниченном цилиндре и сравнивая (5.7) с (5.8), мы видим, что описанный поверхностный ток по боковой поверхности цилиндра эквивалентен такому же цилиндру с однородной намагниченностью

$$J = i, \quad (5.8'')$$

имеющему на основаниях магнитные массы с поверхностной плотностью $\sigma = \pm i$.

Разделим поверхность S , опирающуюся на токовый контур $l[S]$, на две части S_1 и S_2 при помощи линии L и заменим ток I по контуру $l[S]$ токами I_1 и I_2 такой же величины по замкнутым контурам $l[S_1]$ и $l[S_2]$, ограничивающим поверхности S_1 и S_2 и совпадающим по линии L , причём направим эти токи так, чтобы лицевые стороны S_1 и S_2 совпадали с лицевой стороной S . Очевидно, что

$$\int_{S_1} d\mathbf{S} + \int_{S_2} d\mathbf{S} = \int_S d\mathbf{S},$$

следовательно, согласно (5.3) магнитный момент совокупности токов I_1 и I_2 равен магнитному моменту тока I . Это вполне понятно, так как по линии L имеются два тока одинаковой величины и взаимно противоположных направлений, и, следовательно, силы, с которыми магнитное поле действует на эту линию, взаимно уравниваются. Разделив поверхность S на площадки dS и заменив ток I токами такой же величины по контурам $l[dS]$ этих площадок, получаем совокупность элементарных токов, заполняющих контур $l[S]$, причём момент каждого из этих токов определяет формула (5.3'). Из сказанного выше следует, что совокупность этих элементарных токов I эквивалентна такому же току I по контуру $l[S]$. Переходя к соленоиду от отдельного контура, убеждаемся, что совокупность заполняющих цилиндр элементарных токов эквивалентна току такой же величины по соленоиду, навитому на этот цилиндр, и рассмотренному выше поверхностному току соответствующей плотности i по боковой поверхности цилиндра.

Таким образом, намагниченный цилиндр эквивалентен заполняющей его совокупности элементарных токов. Это, очевидно, также справедливо для намагниченного тела любой формы.

III. Дополнения к § 1

1. Придавая поперечному сечению цилиндра, о котором шла речь выше, форму прямоугольника с малым расстоянием Δ между одной парой противоположных сторон, получаем «продольно намагниченный» слой (рис. 5.2, з) и эквивалентную ему совокупность двух взаимно противоположных поверхностных токов на его поверхностях по направлениям, нормальным намагничению слоя. Пусть \mathbf{i} и $-\mathbf{i}$ – плотности поверхностных токов. Полагая $\Delta \rightarrow 0$ и $i \rightarrow \infty$, причём произведение $i \cdot \Delta$ остаётся без изменения, получаем двойной поверхностный ток и эквивалентную ему продольно намагниченную поверхность, на которой согласно (3.8'') $J_\tau = \infty$, а произведение $J_\tau \cdot \Delta$ имеет конечное значение.

2. Заменяя, отрезок линейного тока I с длиной dl отрезком (такой же длины) элементарной токовой трубки с поперечным сечением dS и с плотностью тока \mathbf{j} , мы должны в (5.1) вместо $I \cdot d\mathbf{l}$ подставить $dI \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}) \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{j} \cdot (d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{l}) = \mathbf{j} \cdot dV$. Таким образом, получаем для силы $d\mathbf{F}$, действующей на элемент объёмного тока $\mathbf{j} \cdot dV$ в магнитном поле \mathbf{B} , выражение

$$d\mathbf{F} = [\mathbf{j} \mathbf{B}] \cdot dV. \quad (5.9)$$

3. Подставляя в (5.9) выражение (4.2) для вектора \mathbf{j} через линейную скорость \mathbf{w} движения микрочарядов, получаем силу, действующую на заряд de , движущийся со скоростью \mathbf{w} в магнитном поле \mathbf{B} :

$$d\mathbf{F} = [\mathbf{w} \mathbf{B}] \cdot de. \quad (5.9')$$

Прибавляя силу $\mathbf{E} \cdot de$, с которой на заряд de действует электрическое поле \mathbf{E} , получаем лоренцеву силу $d\mathbf{F}^* = (\mathbf{E} + [\mathbf{w} \mathbf{B}]) \cdot de$, действующую на заряд de , движущийся в электромагнитном поле. В частности, это выражение справедливо для зарядов, несомых средой, если она движется вместе с ними в электромагнитном поле со скоростью \mathbf{w} . Но отношение $d\mathbf{F}^*$ к de (численно) равно силе, действующей на единицу заряда. Оно аналогично полю \mathbf{E} . Обозначим его \mathbf{E}^* . Таким образом, на заряды, несомые движущейся средой, действует *эффективное электрическое поле*

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + [\mathbf{w} \mathbf{B}]. \quad (5.9'')$$

Подставляя \mathbf{E}^* вместо \mathbf{E} в соотношение (4.32), получаем закон Ома для проводящей среды, движущейся в электромагнитном поле со скоростью \mathbf{w} :

$$\mathbf{j} = \gamma \cdot (\mathbf{E}^* + \mathbf{E}^{\text{ср}}) = \gamma \cdot (\mathbf{E} + [\mathbf{w} \mathbf{B}] + \mathbf{E}^{\text{ср}}) \quad (5.9''')$$

(см. [Тамм, 1976], с. 534). Здесь, в виде исключения из общего для настоящей книги правила идёт речь о поле в движущейся среде.

§ 2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА В ОТСУТСТВИИ МАГНИТНОЙ СРЕДЫ

Здесь и в следующих двух параграфах будем полагать, что всюду имеем $\mu = 1$ и $\mathbf{J}^0 = 0$.

I. Поле линейных, объёмных и поверхностных токов

Опыт показывает, что элемент $I \cdot d\mathbf{l}$ линейного тока I , содержащий точку q , создаёт в пространстве, в котором отсутствуют магнетики, магнитное поле, определяемое законом *Био – Савара – Лапласа*:

$$d\mathbf{B}(a) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{[d\mathbf{l} \mathbf{L}_{qa}]}{L_{qa}^3}, \quad (5.10)$$

где $\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{H}$. Так как множитель $(\mu_0 \cdot I / 4\pi \cdot L_{qa}^3)$ при векторном произведении $[d\mathbf{l} \mathbf{L}_{qa}]$ – положительная скалярная величина, то $d\mathbf{B} \perp d\mathbf{l}$, $d\mathbf{B} \perp \mathbf{L}_{qa}$ и векторы $d\mathbf{l}$, \mathbf{L}_{qa} , $d\mathbf{B}$ образуют правую тройку (рис. 5.3). Абсолютная величина $dB(a) = (\mu_0 \cdot I \cdot dl \cdot \sin(\mathbf{dl}, \mathbf{L}_{qa})) / (4\pi \cdot L_{qa}^2)$.

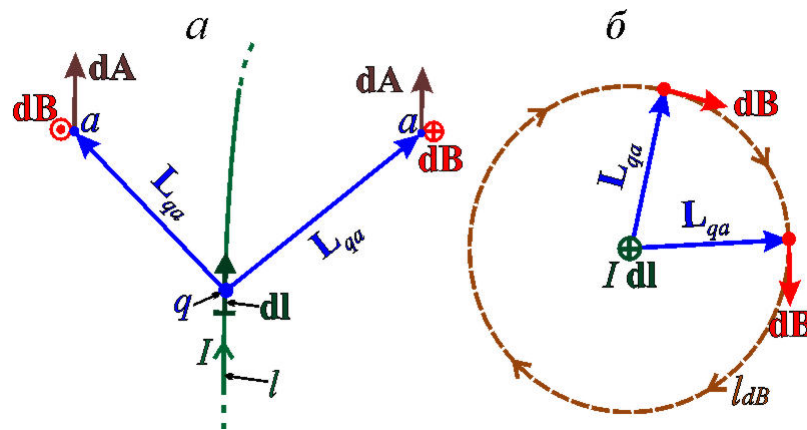


Рис. 5.3.

К закону Био – Савара – Лапласа для линейного электрического тока.

На рис. "а" элемент $d\mathbf{l}$ тока I , точки a, q лежат в плоскости рисунка. На рис. "б" элемент $d\mathbf{l}$ тока I ортогонален плоскости рисунка и направлен от читателя

Идёт речь о поле \mathbf{B} (равном $\mu_0 \cdot \mathbf{H}$ при $\mu=1$, $\mathbf{J}^0=0$), действующем на токи и магнитные массы, согласно сказанному в § 1 настоящей главы и в главе второй.

Поле \mathbf{B} можно определить, исходя из закона Ампера (5.1). Пусть $d\mathbf{F}$ – сила, приложенная к элементу $I \cdot d\mathbf{l}$ линейного тока I , а \mathbf{n} – единичная нормаль к плоскости (взаимно перпендикулярных) векторов $d\mathbf{F}$ и $d\mathbf{l}$, образующая правовинтовую систему $d\mathbf{F}$, $d\mathbf{l}$, \mathbf{n} . Тогда согласно (5.1)

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{n} \cdot dF_{\max}}{I \cdot dl}, \quad (5.10')$$

где dF_{\max} – максимальное из значений, принимаемых силой dF при вращении элемента $I \cdot d\mathbf{l}$ около направления силы $d\mathbf{F}$, а нормаль \mathbf{n} определяется при этом значении dF .

Из (5.2') можно получить другое определение поля \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}}{dM} \cdot dM_{\text{вр max}}, \quad (5.10'')$$

где \mathbf{v} – единичный вектор по направлению магнитного момента $d\mathbf{M}$ элементарного токового контура при устойчивом равновесии этого контура, а $dM_{\text{вр max}}$ – вращающий момент, действующий на контур, когда момент $d\mathbf{M}$ перпендикулярен к вектору \mathbf{v} .

Интегрируя равенство (5.10) по контуру l линейного тока, получаем для магнитного поля, создаваемого линейным током, выражение

$$\mathbf{B}(a) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \oint_l \frac{[\mathbf{dl} \mathbf{L}_{qa}]}{L_{qa}^3}, \quad (5.11)$$

Заменяя элемент $I \cdot \mathbf{dl}$ линейного тока отрезком такой же длины dl элементарной токовой трубки с сечением dS и с током $dI = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{dS})$, где \mathbf{j} – плотность тока в элементе объёма $dV = (\mathbf{dl} \cdot \mathbf{dS})$ этого отрезка токовой трубки, имеем

$$dI \cdot [\mathbf{dl} \mathbf{L}_{qa}] = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{dS}) \cdot [\mathbf{dl} \mathbf{L}_{qa}] = (\mathbf{dl} \cdot \mathbf{dS}) \cdot [\mathbf{j} \mathbf{L}_{qa}] = [\mathbf{j} \mathbf{L}_{qa}] \cdot dV.$$

Подставляя это выражение в (5.10) и интегрируя по области V , занимаемой токовым кольцом, получаем формулы для полей, создаваемых соответственно элементом объёмного тока и всем токовым кольцом:

$$d\mathbf{B}(a) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\mathbf{j} \mathbf{L}_{qa}]}{L_{qa}^3} \cdot dV, \quad \mathbf{B}(a) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \frac{[\mathbf{j} \mathbf{L}_{qa}]}{L_{qa}^3} dV. \quad (5.12)$$

Чтобы перейти от выражений для векторов \mathbf{B} и $d\mathbf{B}$ к выражениям для их компонент по какому-либо направлению, надо заменить векторные произведения их компонентами по этому направлению, например

$$B_x(a) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \oint_l \frac{[\mathbf{dl} \mathbf{L}_{qa}]_x}{L_{qa}^3} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \oint_l \frac{(z_a - z_q) \cdot dy - (y_a - y_q) \cdot dz}{L_{qa}^3} \quad (5.11')$$

в случае линейного тока и

$$B_x(a) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \frac{[\mathbf{j} \mathbf{L}_{qa}]_x}{L_{qa}^3} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \frac{(z_a - z_q) \cdot j_y - (y_a - y_q) \cdot j_z}{L_{qa}^3} dV \quad (5.12')$$

в случае объёмного тока.

Заменяя в (5.12) элемент $\mathbf{j} \cdot dV$ объёмного тока элементом $\mathbf{i} \cdot dS$ поверхностного тока (см. рис. 4.7), получаем для магнитного поля такого тока выражения

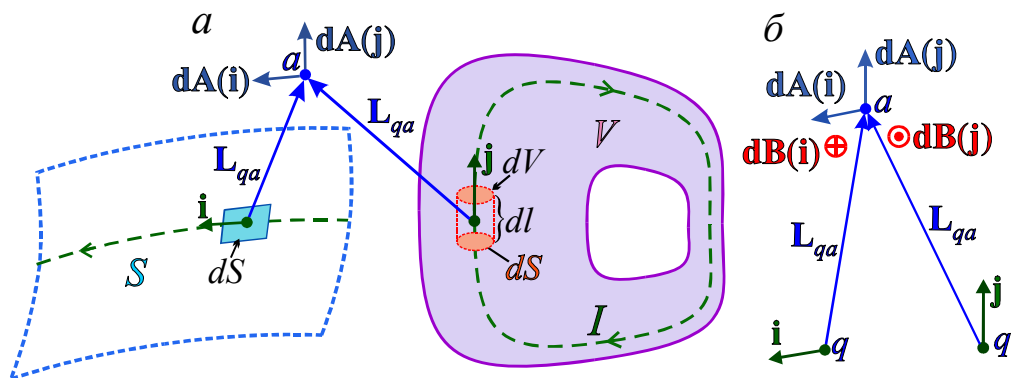


Рис. 5.4.

Слагаемые поля \mathbf{B} и векторного потенциала \mathbf{A} , соответствующие элементам тока: поверхностного, объёмного.

Векторы $d\mathbf{A}(\mathbf{j}) \parallel \mathbf{j}$, $d\mathbf{A}(\mathbf{i}) \parallel \mathbf{i}$. На рис. "б" векторы \mathbf{j} , \mathbf{i} , \mathbf{L}_{qa} лежат в плоскости рисунка и (тогда) векторы $d\mathbf{B}(\mathbf{j})$, $d\mathbf{B}(\mathbf{i})$ – ортогональны этой плоскости

$$d\mathbf{B}(a) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\mathbf{i} \mathbf{L}_{qa}]}{L_{qa}^3} \cdot dS, \quad \mathbf{B}(a) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_S \frac{[\mathbf{i} \mathbf{L}_{qa}]}{L_{qa}^3} dS. \quad (5.13)$$

Чтобы получить фактически действующее поле \mathbf{B} , надо сложить поля, определяемые формулами (5.11), (5.12)₂, (5.13)₂ (см. [рис. 5.3](#), [рис. 5.4](#)).

II. Векторный потенциал

Согласно (1.127)

$$\frac{[\mathbf{j} \mathbf{L}_{qa}]}{L_{qa}^3} = \left[\left(\overset{a}{\nabla} \frac{1}{L_{qa}} \right) \mathbf{j} \right] = \left[\overset{a}{\nabla} \left(\frac{\mathbf{j}}{L_{qa}} \right) \right] - \left[\overset{a}{\nabla} \mathbf{j} \right] \cdot \frac{1}{L_{qa}}.$$

Производная $\overset{a}{\nabla}$ (по a) поля $\mathbf{j}(q)$ равна нулю, поэтому

$$\int_V \frac{[\mathbf{j} \mathbf{L}_{qa}]}{L_{qa}^3} dV_q = \left[\overset{a}{\nabla} \int_V \frac{\mathbf{j}}{L_{qa}} dV_q \right] = \text{rot} \int_V \frac{\mathbf{j}}{L_{qa}} dV_q.$$

Таким образом, определяемый выражением (5.12)₂ вектор

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}, \quad \text{где} \quad \mathbf{A}(a) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \frac{\mathbf{j}(q)}{L_{qa}} dV \quad (5.14)$$

– векторный потенциал магнитного поля постоянного объёмного тока в отсутствие магнетиков. Зная поле \mathbf{A} в какой-либо области пространства, можно согласно (5.14)₁ определить поле \mathbf{B} дифференцированием вектора \mathbf{A} . Поле \mathbf{A} , как и поле \mathbf{B} , является векторным, но оно удобнее для расчёта, так как его выражение (5.14)₂ через плотность тока \mathbf{j} , создающего поле \mathbf{B} , проще соответствующего выражения (5.12)₂ для поля \mathbf{B} и аналогично выражению (2.44")₂ для скалярного потенциала U . Область интегрирования в (5.14)₂ – та же, что в (5.12)₂.

От (5.14)₂ можно перейти к выражениям

$$\mathbf{A}(a) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \int_l \frac{d\mathbf{l}}{L_{qa}}, \quad \mathbf{A}(a) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_S \frac{\mathbf{i}(q)}{L_{qa}} dS \quad (5.14')$$

для векторного потенциала \mathbf{A} поля \mathbf{B} , создаваемого соответственно линейным и поверхностным токами. Действительно, подставляя в (5.14)₂ $j = dl/\Delta S$ и $\Delta V = \Delta S \cdot dl$, где ΔS – площадь поперечного сечения тока (заменяемого линейным), получаем (5.14')₁. Аналогично получаем (5.14')₂ подстановками $j = dl/dS$, $dS = h \cdot dl'$, где dl' и h – размеры поперечного сечения тока (заменяемого поверхностным).

От выражений для вектора \mathbf{A} легко перейти к выражениям, для его компоненты по какому-либо направлению. Например, для объёмных и линейных токов из (5.14)₂ и (5.14')₁ получаем:

$$A_x(a) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \frac{j_x dV_q}{L_{qa}}, \quad A_x(a) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \int_l \frac{dx_q}{L_{qa}}. \quad (5.14'')$$

Из того, что выражения (5.14'') для компонент векторного потенциала \mathbf{A} аналогичны

выражению (2.44'')₂ для скалярного потенциала U , следует, что векторный потенциал \mathbf{A} , определяемый формулой (5.14)₂, не терпит разрыва на поверхностном токе, так же как скалярный потенциал U не терпит разрыва на поверхностной массе (поверхностном заряде) в виде простого слоя. Из этого также следует, что тангенциальная компонента вектора \mathbf{A} терпит разрыв на продольно намагниченной поверхности и на эквивалентном ей двойном поверхностном токе (см. раздел III, § 1). За этим исключением вектор-потенциал \mathbf{A} на любой поверхности непрерывен.

У линейного тока согласно (5.14')₁ вектор-потенциал \mathbf{A} принимает бесконечно-большие значения.

Если направление тока всюду коллинеарно некоторой прямой, то согласно (5.14)₂, (5.14') поле \mathbf{A} также коллинеарно ей (см. рис. 5.3, а), а если направление тока всюду компланарно некоторой плоскости, то поле \mathbf{A} также компланарно этой плоскости.

Применяя к (5.14')₁ преобразование (1.41')₂, получаем для векторного потенциала \mathbf{A} выражение

$$\mathbf{A}(a) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \int_S \left[\mathbf{dS} \frac{q}{L_{qa}} \right], \quad (5.15)$$

в котором S – произвольно взятая поверхность, опирающаяся на контур $l[S]$ тока I , а q – точка, пробегающая по этой поверхности.

Посмотрим, чему равны дивергенция и лапласиан вектора \mathbf{A} , определяемого формулой (5.14)₂. Интегрирование в (5.14)₂ проводится по точке q , а дивергенцию надо брать по аргументу a вектора \mathbf{A} , поэтому

Интеграл по q от дивергенции по a нельзя преобразовать по теореме Гаусса – Остроградского (см. замечание 5 в разделе I, § 9 главы первой). Поэтому далее совершается переход к дифференцированию по q .

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div}^a \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \frac{\mathbf{j}}{L_{qa}} dV \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \operatorname{div}^a \frac{\mathbf{j}}{L_{qa}} dV, \quad (5.16)$$

где, так же как в (5.14)₂, область интегрирования V можно ограничить поверхностью $S[V]$ токового кольца. Подынтегральная функция

$$\operatorname{div}^a \frac{\mathbf{j}}{L_{qa}} = \left(\frac{a}{\nabla} \frac{\mathbf{j}}{L_{qa}} \right) = \frac{(\nabla^a \mathbf{j})}{L_{qa}} + \left(\mathbf{j} \frac{a}{\nabla} \frac{1}{L_{qa}} \right) = \left(\mathbf{j} \frac{a}{\nabla} \frac{1}{L_{qa}} \right) = - \left(\mathbf{j} \frac{q}{\nabla} \frac{1}{L_{qa}} \right)$$

так как $\mathbf{j} = \mathbf{j}(q)$ и $(\nabla^a \mathbf{j}) = 0$, а $\frac{a}{\nabla} L_{qa}^{-1} = -\frac{q}{\nabla} L_{qa}^{-1}$. Поэтому

$$\left(\frac{a}{\nabla} \frac{\mathbf{j}}{L_{qa}} \right) = - \left(\frac{q}{\nabla} \frac{\mathbf{j}}{L_{qa}} \right) + \frac{(\nabla^q \mathbf{j})}{L_{qa}}.$$

На первый взгляд может показаться, что из тождества (1.126') следует равенство $\left(\frac{a}{\nabla} (\mathbf{j} L_{qa}^{-1}) \right) = - \left(\frac{q}{\nabla} (\mathbf{j} L_{qa}^{-1}) \right)$. Но надо учесть, что величина $\mathbf{j}(q)$ не является функцией точки a , и принять во внимание оговорку, следующую за формулами (1.127) и касающуюся применимости формул (1.126').

Таким образом, из (5.16) получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(a) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \operatorname{div} \frac{\mathbf{j}}{L_{qa}} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \frac{\operatorname{div} \mathbf{j}}{L_{qa}} dV = 0. \quad (5.17)$$

Здесь принято во внимание, что согласно (4.17)₁ $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, а в соответствии с (1.30)

$$\int_V \operatorname{div} \frac{\mathbf{j}}{L_{qa}} dV = \oint_{S[V]} \frac{j_n dS}{L_{qa}} = 0, \quad (5.16')$$

так как $j_n = 0$ на поверхности $S[V]$ токового кольца. Таким образом, поле \mathbf{A} является соленоидальным, его векторные линии нигде не обрываются и согласно (5.14)₁ охватываются силовыми линиями магнитного поля \mathbf{B} .

В более общем случае переменного поля, когда согласно (4.5) и (4.10) $\operatorname{div} \mathbf{j} = -(\partial \delta_{\text{свб}} / \partial t)$ и $\operatorname{Div} \mathbf{j} = -(\partial \sigma_{\text{свб}} / \partial t)$, имеем вместо (5.17)

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(a) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left(\int_S \frac{\partial \sigma_{\text{свб}} / \partial t}{L_{qa}} dS + \int_V \frac{\partial \delta_{\text{свб}} / \partial t}{L_{qa}} dV \right). \quad (5.17')$$

Чтобы в этом убедиться, распространим интегрирование в (5.17) на всё пространство и преобразуем первый из интегралов в (5.17) по теореме Гаусса – Остроградского (1.30). При этом мы полагаем, что все токи находятся на конечных расстояниях (от точки a) и учитываем возможность существования особых для поля \mathbf{j}/L_{qa} поверхностей S , на которых компонента j_n терпит разрывы. В частности, такими являются поверхности токовых колец. В результате интегрирования по поверхностям безопасности, охватывающим особые поверхности S , получаем интегралы по S от

$$-\frac{\operatorname{Div} \mathbf{j}}{L_{qa}} = \frac{\partial \sigma_{\text{свб}} / \partial t}{L_{qa}}.$$

Согласно (2.44'')_{2,3}, (2.115) для вакуума правая часть (5.17') равна $-\varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot (\partial U / \partial t)$, следовательно, $\operatorname{div} \mathbf{A} = -\varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot (\partial U / \partial t)$. Для среды однородной (всюду) по ε и μ получаем в соответствии с (3.39')₁ $\operatorname{div} \mathbf{A} = -\varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot (\partial U / \partial t)$, с чем совпадает условие (6.40) в главе шестой. Так, естественно, совершается переход к этому условию Лоренца от формул, справедливых для постоянного поля.

Из главы второй мы знаем, что потенциал U поля \mathbf{f} удовлетворяет уравнению Пуассона (2.46) $\nabla^2 U = -4\pi \cdot \delta$. Но выражение (5.14'')₁ для компоненты A_x вектора \mathbf{A} отличается от выражения (2.44'')₂ для потенциала U только заменой скаляра δ скаляром $\mu_0 \cdot j_x / 4\pi$. Следовательно, функция A_x должна удовлетворить уравнению Пуассона с правой частью $-\mu_0 \cdot j_x$. Таким образом, компоненты A_x, A_y, A_z вектора \mathbf{A} должны удовлетворять уравнениям

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 \cdot j_x, \quad \nabla^2 A_y = -\mu_0 \cdot j_y, \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 \cdot j_z. \quad (5.18)$$

Отсюда получаем для векторного потенциала \mathbf{A} уравнение

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \cdot \mathbf{j}. \quad (5.18')$$

III. Система уравнений поля

Согласно (5.14)₁, (5.17) и (5.18')

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \cdot \mathbf{j}.$$

Таким образом, поле \mathbf{B} , создаваемое постоянным током в вакууме, удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\text{I. } \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{j}, \quad \text{II. } \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (5.19)$$

Согласно второму уравнению этой системы поле \mathbf{B} является чисто вихревым; его силовые линии нигде не обрываются. Поле \mathbf{B} не имеет источников (точек обрыва линий l_B).

Но в соответствии с изложенным в § 6 главы первой такие векторные линии должны охватывать некоторые кольцевидные области пространства, содержащие вихревые линии поля. Первое уравнение системы (5.19) указывает, где находятся эти вихревые линии и чем определяется их густота, плотность вихрей поля \mathbf{B} . Согласно этому уравнению вихревыми линиями L^B поля \mathbf{B} (линиями L^B , т. е. векторными линиями $l_{\operatorname{rot} \mathbf{B}}$ поля вектора $\operatorname{rot} \mathbf{B}$; (см. раздел III, § 6 главы первой).) являются токовые линии l_j и плотность вихрей этого поля в окрестности какой-либо точки определяется плотностью \mathbf{j} тока в ней. Силовые линии поля \mathbf{B} замыкаются вокруг токов, которые занимают кольцевидные вихревые области этого поля.

Из уравнений системы (5.19) следует, что

$$\int_S (\operatorname{rot} \mathbf{B} \, d\mathbf{S}) = \mu_0 \cdot \int_S (\mathbf{j} \, d\mathbf{S}), \quad \int_V \operatorname{div} \mathbf{B} \, dV = 0$$

для любой поверхности S и любой области V . Следовательно, по теоремам Стокса (1.23) и Гаусса – Остроградского (1.30)

$$\oint_{l[S]} (\mathbf{B} \, d\mathbf{l}) = \mu_0 \cdot I_S, \quad \oint_{S[V]} (\mathbf{B} \, d\mathbf{S}) = 0, \quad I_S = \int_S (\mathbf{j} \, d\mathbf{S}), \quad (5.19')$$

где $l[S]$ – замкнутый контур, ограничивающий поверхность S ; $S[V]$ – замкнутая поверхность, ограничивающая область V ; I_S – поток вектора \mathbf{j} через поверхность S , опирающуюся на контур $l[S]$, причём нормаль n к поверхности S образует правовинтовую систему с обходом по контуру $l[S]$ (рис. 5.5, а).

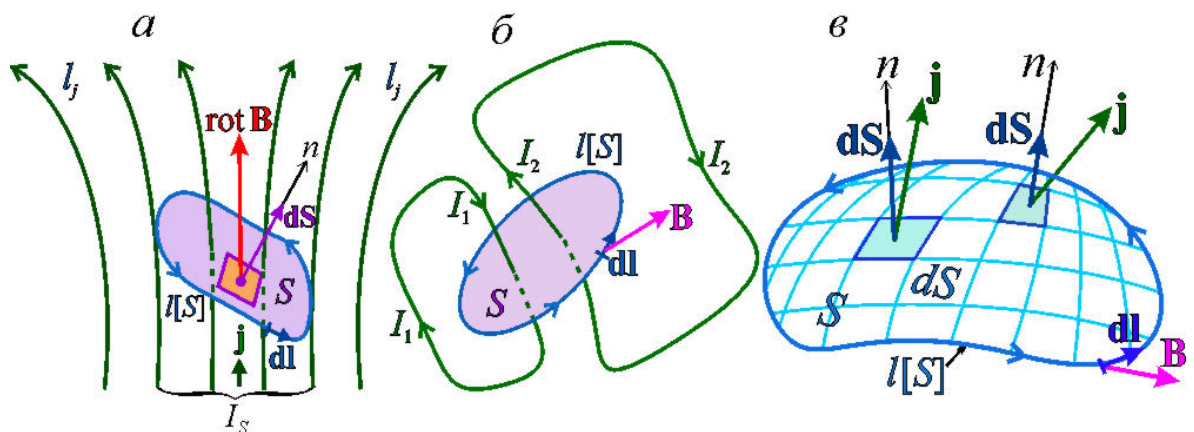


Рис. 5.5.

Контур $l[S]$, охватывающие токи: объёмный с плотностью \mathbf{j} (а), линейные (б); к закону полного тока (5.19')₁ (в)

Равенства (5.19')_{1,2} представляют собой уравнения поля **B** в интегральной форме.

Умножая обе части уравнения (5.19')₁ на m_a , получаем согласно (3.22'')₁ равенство

$$\oint_{l[S]} (\mathbf{F} \, d\mathbf{l}) = m_a \cdot \mu_0 \cdot I_S, \quad (5.20)$$

левая часть которого – есть работа при перемещении пробной магнитной массы m_a по контуру $l[S]$, охватывающему поток I_S . Полагая в (5.20) $I_S=1$ А и $m_a=m_D=1$ А·м, т. е. единице магнитной массы, выбранной в § 2 главы второй, мы видим, что при совершении единичной магнитной массой m_D обхода вокруг тока в 1 А ($I_S=1$ А) совершается работа, равная $4\pi \cdot 10^{-7}$ А²·Гн= $4\pi \cdot 10^{-7}$ Дж.

Левую часть (5.19')₁, делённую на μ_0 , называют *магнитодвижущей силой* в контуре $l[S]$.

Согласно (5.19')₁ магнитодвижущая сила в контуре $l[S]$ равна потоку вектора **j** через любую поверхность, опирающуюся на этот контур (потоку вектора **j**, сцепленному с этим контуром).

Если контур $l[S]$ охватывает несколько линейных (квазилинейных) токов, то этот поток равен алгебраической сумме I_k токов, пронизывающих поверхность S , опирающуюся на контур (рис. 5.5, б). Таким образом, получаем линейную форму первого уравнения поля **B**:

$$\oint_{l[S]} (\mathbf{B} \, d\mathbf{l}) = \mu_0 \cdot \sum I_k, \quad (5.19'')$$

где ток I_k считается положительным, если его направление образует правовинтовую систему с обходом по контуру $l[S]$, и отрицательным – в противном случае. В примере, приведенном на рис. 5.5, б, $I_1 < 0$, $I_2 > 0$.

Равенства (5.19')₁ и (5.19'') выражают *закон полного тока* для постоянного поля в отсутствие магнетиков.

Напомним, что поток I_S вектора **j** через поверхность S тесно связан электрическим током I через S . В частности, если на всей поверхности S углы между направлениями **j** и **dS** – острые (как показано на рис. 5.5, в) (или равны нулю), то $I_S=I$. Если же эти углы – тупые (или равны π), то $I_S=-I$.

Согласно (5.19')₂ поток вектора **B** через любую замкнутую поверхность равен нулю, что вполне естественно, так как векторные линии l_B нигде не обрываются и поэтому сколько их входит внутрь ограниченной поверхностью $S[V]$ области V , столько же должно выходить из неё наружу.

§ 3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ОТСУТСТВИИ МАГНИТНОЙ СРЕДЫ

Формулы, полученные в § 2, позволяют рассчитать поле **B**, создаваемое заданными токами, и его потенциал **A**. Для этого могут служить дифференциальная и интегральная формы (5.19)₁, (5.19')₁ первого уравнения поля **B**, дифференциальное уравнение (5.18') потенциала **A** и выражения вида (5.10) – (5.14''). О применении уравнения потенциала **A** (в более общем случае) будет идти речь в § 5. Выражения вида (5.10) – (5.14'') пригодны для определения не только поля, создаваемого всем токовым кольцом, но также

полей, создаваемых отдельными, произвольно выделенными частями тока (например, одной из сторон прямоугольного токового контура), с тем, чтобы сложив результаты, соответствующие всем частям тока, получить поле, создаваемое им.

Уравнения (5.19')₁, (5.19'') применимы только для поля, создаваемого токовым кольцом, взятым в целом ("полным током"), или какой-либо токовой трубкой, взятой целиком, а не отдельными участками цепи тока или трубки тока. Отметим, что, применяя это уравнение к незамкнутому току, мы получили бы для циркуляции вектора \mathbf{B} по контуру l различные значения, так как такой ток пронизывает некоторые, но не все возможные поверхности S , опирающиеся на контур l . К току по линиям, начинающимся и кончающимся на бесконечности, уравнения (5.19')₁, (5.19'') применимы, так как можно считать, что этот ток замыкается бесконечно удалённым участком цепи.

Первое дифференциальное уравнение поля $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ (а также интегральная форма этого уравнения) в общем случае недостаточно для определения поля \mathbf{B} ; для этого необходима вся система (5.19), определяющая не только ротор вектора \mathbf{B} , но также его дивергенцию. Каждое из трёх уравнений вида $\operatorname{rot}_x \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_x$ в общем случае содержит две неизвестные производные от компонент вектора \mathbf{B} по координатным направлениям, так как $\operatorname{rot}_x \mathbf{B} = \partial B_z / \partial y - \partial B_y / \partial z$. Но симметрия магнитного поля (обусловленная симметрией тока) облегчает его расчёт. В частности, в некоторых случаях благодаря симметрии поля можно надлежащим выбором системы координат добиться обращения в нуль двух из трёх компонент поля и производных от третьей компоненты по двум из трёх координатных направлений. Таким образом, возникает возможность расчёта поля с помощью одного только первого уравнения системы (5.19) или (5.19'). Аналогичное мы встречали в § 6 главы второй.

I. Симметрия тока и его магнитного поля

Электрический ток будем называть симметричным, если векторное поле его плотности $\mathbf{j}(q)$ симметрично (см. раздел III, § 9 главы первой). Простыми примерами объёмных токов с цилиндрической симметрией являются: ток в однородном круглом кольце (см. [рис. 4.15, а](#)) любого сечения (нечётная цилиндрическая симметрия) и ток в неограниченном однородном круговом цилиндре (чётная цилиндрическая симметрия). Простейшие примеры симметричных необъёмных токов: линейные и поверхностные токи, расположенные на плоскости (чётная зеркальная симметрия), прямолинейный ток (чётная цилиндрическая симметрия), система круговых линейных токов с общей осью (нечётная цилиндрическая симметрия).

Исходя из приведенных выше выражений для \mathbf{A} и \mathbf{B} , можно доказать ([Альпин, 1966], с. 315 – 317), что *создаваемое током* (полем \mathbf{j}), *чётно или нечётно симметричным* относительно некоторой плоскости S , *поле \mathbf{B} нечётно или чётно симметрично* (соответственно) относительно этой плоскости, а поле \mathbf{A} обладает такой же симметрией относительно плоскости

S , как ток, создающий поле \mathbf{B} .

Из этого, в частности, следует, что на плоскости симметрии тока чётной, либо нечётной (рис. 1.17) для тангенциальных и нормальных компонент имеем соответственно

$$B_t=0, A_n=0, \quad \text{либо} \quad B_n=0, A_t=0, \quad (5.21)$$

за исключением точек (на плоскости симметрии), через которые проходят линейные токи; в этих точках векторы \mathbf{B} и \mathbf{A} обращаются в бесконечность.

Имея в виду определения цилиндрической симметрии и сферической симметрии через зеркальную симметрию (см. раздел III, § 9 главы первой), можно из сказанного выше сделать следующие выводы.

1. Поле \mathbf{B} , создаваемое током, чётно симметрично относительно оси L (рис. 1.18, а), нечётно симметрично относительно этой оси (рис. 1.18, б). Из этого согласно сказанному в разделе III, § 9 главы первой следует, что компоненты магнитного поля в плоскостях, проходящих через ось чётной симметрии тока, равны нулю, а силовые линии магнитного поля представляют собой окружности с общей осью по оси симметрии тока. Поле \mathbf{A} , соответствующее этому полю \mathbf{B} , чётно симметрично относительно оси L симметрии тока и векторы \mathbf{A} лежат в плоскостях, проходящих через эту ось. В системе r, φ, z с осью Z по оси симметрии тока

$$\begin{aligned} B_r=0, B_z=0, \mathbf{B}=\mathbf{B}_\varphi, B_\varphi=B_\varphi(r, z), \\ A_\varphi=0, \mathbf{A}=\mathbf{A}_r+\mathbf{A}_z, A_r=A_r(r, z), A_z=A_z(r, z). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Пр и м е р. Отрезок $z_1 z_2$ оси Z (рис. 5.6) тока I по направлению этой оси. Воспользуемся выражениями (5.10), (5.11). Элемент отрезка $dl_q=dz_q$, $\sin(\mathbf{dl}_q, \mathbf{L}_{qa})=\cos \alpha_q$, Магнитное поле элемента dz_q тока I

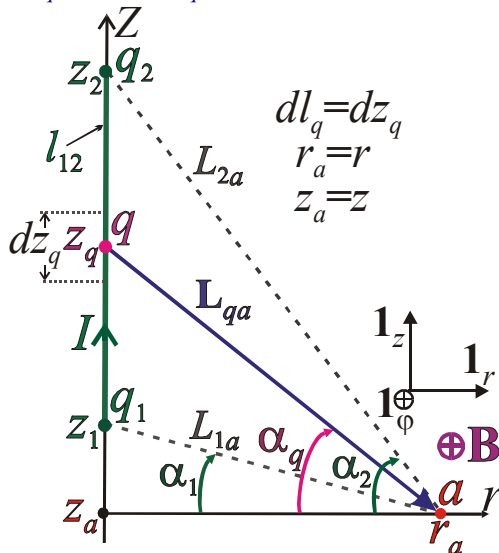


Рис. 5.6.

К выводу выражений для магнитного поля, создаваемого током I вдоль отрезка прямой

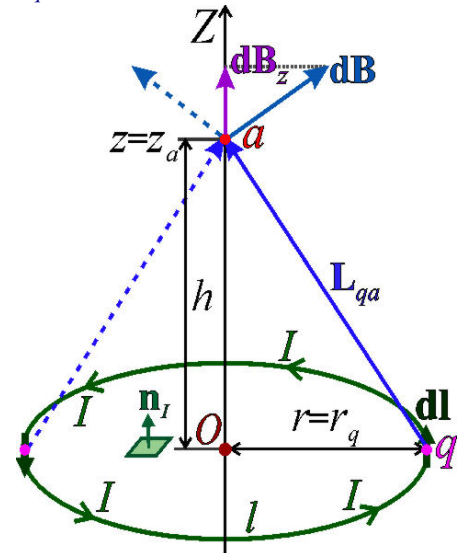


Рис. 5.7.

Магнитное поле на оси Z тока I по окружности l

$$d\mathbf{B} = \mathbf{1}_\varphi \cdot dB_\varphi = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot dz_q}{4\pi \cdot L_{qa}^2} \cdot \cos \alpha_q. \quad \text{Следовательно, поле отрезка } z_1 z_2 \text{ тока } I:$$

$\mathbf{B}=\mathbf{1}_\varphi \cdot B_\varphi$, где $B_\varphi=\int_{z_1}^{z_2} dB_\varphi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dB_\varphi$. Принимая во внимание, что $L_{qa}=r/\cos \alpha_q$, $z_q-z=r \cdot \operatorname{tg} \alpha_q$, производная $(dz_q/d\alpha_q)=r/\cos^2 \alpha_q$, $dz_q=(r \cdot d\alpha_q)/\cos^2 \alpha_q$, получаем

$$\mathbf{B}=\mathbf{1}_\varphi \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) = \mathbf{1}_\varphi \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left(\frac{z_2 - z}{\sqrt{r^2 + (z_2 - z)^2}} - \frac{z_1 - z}{\sqrt{r^2 + (z_1 - z)^2}} \right). \quad (5.22')$$

Для частных случаев тока I по полуоси Z имеем формулы

$$\mathbf{B}_+ = \mathbf{1}_\varphi \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right), \quad \mathbf{B}_- = \mathbf{1}_\varphi \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right), \quad (5.22'')$$

из которых первая получается при $z_1=0$, $z_2=\infty$, а вторая – при $z_1=-\infty$, $z_2=0$. Для неограниченного тока I по оси Z , при $z_1=-\infty$, $z_2=\infty$, получаем

$$\mathbf{B} = \mathbf{1}_\varphi \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (5.22''')$$

2. На оси L чётной цилиндрической симметрии тока (см. [рис. 1.18, а](#)) магнитное поле \mathbf{B} и нормальная к ней (радиальная) компонента вектора \mathbf{A} равны нулю, а тангенциальная к ней компонента (по направлению оси L) вектора \mathbf{A} непрерывна. Но там, где на оси симметрии тока находится линейный ток, магнитное поле \mathbf{B} и тангенциальная компонента вектора \mathbf{A} принимают бесконечно большие значения в соответствии с (5.11), (5.14')₁.

3. Магнитное поле \mathbf{B} , создаваемое током, нечётно симметричным (см. [рис. 1.18, б](#), [рис. 4.10](#)) относительно некоторой оси L , чётно симметрично относительно этой оси. Векторы \mathbf{B} в этом случае лежат, в плоскостях, проходящих через ось симметрии тока. Поле \mathbf{A} , соответствующее этому магнитному полю, нечётно симметрично относительно оси L . Векторные линии поля \mathbf{A} представляют собой окружности с общей осью по оси L . В системе r, φ, z с осью Z по оси симметрии тока

$$B_\varphi=0, \quad \mathbf{B}=\mathbf{1}_r \cdot B_r(r, z) + \mathbf{1}_z \cdot B_z(r, z), \quad (5.23)$$

$$A_r=0, \quad A_z=0, \quad \mathbf{A}=\mathbf{1}_\varphi \cdot A_\varphi(r, z). \quad (5.23')$$

4. На оси нечётной цилиндрической симметрии тока вектор \mathbf{A} и компоненты вектора \mathbf{B} в плоскости, нормальной к этой оси, равны нулю, а тангенциальная к этой оси компонента вектора \mathbf{B} непрерывна.

Пример. Поле на оси кругового тока (тока по окружности). Допустим, что по окружности $r=r_q$, $z=0$ системе r, φ, z задан ток I по направлению координатной линии l_φ . Определим поле \mathbf{B} в точке a с координатами $r_a=r=0$, $z_a=z=h$ ([рис. 5.7](#)). В силу нечётной симметрии тока относительно оси Z на этой оси поле $\mathbf{B}=\mathbf{1}_z \cdot B_z=\mathbf{n}_I \cdot B_z$, а z – компонента поля, создаваемого элементом $d\mathbf{l}$ тока I : $dB_z=dB \cdot \cos(\mathbf{1}_z, d\mathbf{B})=dB \cdot \left(r_q / \sqrt{r_q^2 + h^2} \right)$, $dB=\mu_0 \cdot I \cdot dl / (4\pi \cdot L_{qa}^2)$, так как угол $(d\mathbf{l}, \mathbf{L}_{qa})=\pi/2$. Но $dl=r_q \cdot d\varphi$, а $L_{qa}^2=r_q^2 + h^2$, следовательно,

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \left(r_q / \sqrt{r_q^2 + h^2} \right) \cdot d\varphi, \quad dB_z = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \left(r_q^2 / \left(\sqrt{r_q^2 + h^2} \right)^3 \right) \cdot d\varphi,$$

$$B_z = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{r_q^2}{\left(r_q^2 + h^2 \right)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot r_q^2}{2 \cdot \left(r_q^2 + h^2 \right)^{3/2}}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{n}_I \cdot \frac{\mu_0 \cdot I \cdot r_q^2}{2 \cdot \left(r_q^2 + h^2 \right)^{3/2}},$$

где $\mathbf{n}_I = \mathbf{1}_z$. Это согласно (5.5) соответствует выражению (2.66'') (для поля \mathbf{f}) однородного двойного слоя в форме круга с радиусом $r_k = r_q$ при $\mathbf{n}_I = \mathbf{n}^0$, т. е. когда лицевая сторона тока соответствует положительной обкладке двойного слоя.

5. В § 1 было сказано об эквивалентности токового контура магнитному листку (однородному двойному магнитному слою) в отношении действия на него магнитного поля. В приведенном примере мы видим такую же эквивалентность в отношении способности создавать магнитное поле.

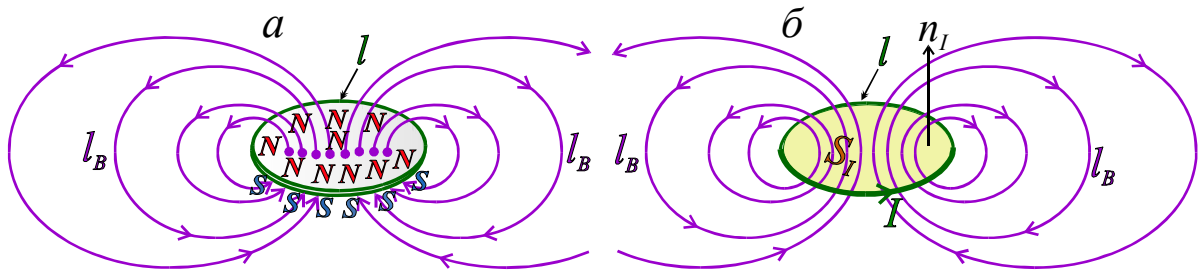


Рис. 5.8.

К эквивалентности магнитных полей однородного двойного слоя с границей l (а) и линейного тока I по контуру l (б)

Векторные линии l_B , показанные на рис. 5.8, а, б, различаются лишь следующим. На рис. "а" они начинаются и оканчиваются на обкладках двойного слоя, а на рис. "б" линии l_B "сцеплены" с контуром l линейного тока I . В бесконечно малом "промежутке" между обкладками двойного слоя (рис. 5.8, а) поле $B \rightarrow \infty$, а на рис. 5.8, б всюду, кроме контура l , поле \mathbf{B} непрерывно.

Вводя для поля \mathbf{B} , создаваемого контуром l линейного тока I , разрывный, но однозначный скалярный потенциал U_l (см. раздел III), мы фактически заменяем поле, показанное на рис. 5.8, б, полем на рис. 5.8, а.

6. Если $z=0$ – плоскость Π нечётной зеркальной симметрии тока (рис. 1.17, б), а ось Z является осью его нечётной цилиндрической симметрии (рис. 1.18, б), то на этой плоскости Π

$$\mathbf{A}=0, \quad B_\varphi=0, \quad B_z=0, \quad \mathbf{B}=\mathbf{1}_r \cdot B_r. \quad (5.24)$$

Такую симметрию имеем, например, в случае, когда плоскость $z=0$ нормальна к общей оси двух круговых токов, одинаковых по величине I и радиусу, но взаимно противоположно направленных, и делит пополам расстояние между их центрами.

7. Магнитное поле сферически симметричного (см. рис. 1.18, в) тока равно нулю.

В этом случае поле \mathbf{A} , как и поле \mathbf{j} , сферически симметрично. У такого поля \mathbf{A} согласно (1.136) производная $\text{rot } \mathbf{A}=0$, $\mathbf{A}=\text{grad } T$. В соответствии с (5.14)₁ $\mathbf{B}=\text{rot } \mathbf{A}=\text{rot grad } T \equiv 0$. Следовательно,

$$\text{если всюду } \mathbf{j}=\mathbf{1}_R \cdot j_R(R), \text{ то } \mathbf{B}=0. \quad (5.25)$$

8. Допустим, что ток обладает чётной цилиндрической симметрией (см. рис. 1.18, а) относительно некоторой оси Z , причём имеются в виду полные цепи тока (которые, однако, могут замыкаться на бесконечности).

Для того чтобы с помощью уравнения (5.19')₁ определить поле \mathbf{B} в некоторой точке a , следует в качестве контура $l[S]$, по которому берётся циркуляция, взять векторную линию l_B , проходящую через эту точку, т. е.

окружность с осью по оси симметрии тока и с радиусом r , равным расстоянию от этой оси до точки a . Согласно (5.22) на таком контуре нормальная к нему компонента поля равна нулю и при соответствующем выборе обхода скалярное произведение $(\mathbf{B} \, d\mathbf{l})=B \cdot dl$. Кроме того, величину $B_l=B$ можно вынести за знак интеграла и, таким образом, получить согласно (5.19')₁

$$\mu_0 \cdot I_S = \oint_{l_B[S]} (\mathbf{B} \, d\mathbf{l}) = B \cdot l_B = 2\pi \cdot r \cdot B, \quad B = \frac{\mu_0 \cdot I_S}{2\pi \cdot r}, \quad (5.26)$$

где I_S – охватываемый линией l_B поток вектора \mathbf{j} через поверхность S , например через круг, ограниченный окружностью l_B . В системе r, φ, z с осью Z по оси симметрии поток $I_S=I_S(r, z)$. В случае линейного тока I по (всей) оси Z имеем при любых r и z $I_S=I$ и, следовательно,

$$B=\mu_0 \cdot I/2\pi \cdot r. \quad (5.27)$$

Это совпадает с полученным выше выражением (5.22''') для поля тока I по неограниченной прямой. Плоскость $z=\text{const}$ (и, в частности, $z=0$) делит этот ток на две части, из которых каждая создаёт в этой плоскости поле $B=\mu_0 \cdot I/4\pi \cdot r$ в соответствии с (5.22'').

Из (5.26)₂ следует, что поле в любой точке a не изменится, если как угодно изменить ток (поле \mathbf{j}), лишь бы не изменились симметрия тока и значение его части I_S . Что же касается остальной части тока, не охватываемой линией l_B , то она никак не влияет на поле в этой точке. Если, например, сжать ток I_S и превратить его в линейный ток по оси симметрии, а остальную часть тока убрать, то поле \mathbf{B} в точке a останется без изменения. В частности, однородный ток I в неограниченном (по высоте) круговом цилиндре создаёт вне цилиндра поле \mathbf{B} , совпадающее с магнитным полем неограниченного прямолинейного тока такой же величины I , расположенного на оси цилиндра.

II. Магнитное поле цепи тока с электродами

О такой цепи тока шла речь в § 6 четвёртой главы, где нас интересовало электрическое поле в земле. Зная поле вектора \mathbf{j} в земле, можно соответствующее ему поле \mathbf{B} рассчитать по формуле (5.12)₂, а магнитное поле линейной части цепи – по формуле (5.11). Но в некоторых случаях благодаря симметрии поля \mathbf{j} расчёт поля \mathbf{B} можно выполнить, минуя расчёт поля \mathbf{j} . Приведём такие расчёты, причём (как всюду в этом параграфе) будем считать $\mu=1, \mathbf{J}^0=0$ во всём пространстве.

1. Цепь с точечными электродами в неограниченной однородной проводящей среде. Поля \mathbf{E} и \mathbf{j} каждого точечного токового электрода (A, B), очевидно, имеют сферическую симметрию. Следовательно, согласно (5.25) магнитное поле тока эмиссии каждого электрода или, короче, магнитное поле электрода всюду равно нулю. Таким образом, поле \mathbf{B} во всём пространстве определяется по формуле (5.10) как поле линейных токов.

Предельно короткая линия L с двумя точечными электродами с зарядами

$\mp \varepsilon_0 \cdot \rho \cdot I = \mp \varepsilon_0 \cdot I / \gamma$ образует в однородной среде электрический диполь с моментом

$$\mathbf{p} = \varepsilon_0 \cdot I \cdot \mathbf{L} / \gamma \quad (L \rightarrow 0, I \rightarrow \infty).$$

Согласно (5.10) и (5.14')₁ такой диполь с центром в точке q создаёт поле $\mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{A}$, определяемое формулами

$$\mathbf{V}(a) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{[\mathbf{L} \mathbf{L}_{qa}]}{L_{qa}^3} = \frac{\gamma \cdot \mu_0}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{[\mathbf{p} \mathbf{L}_{qa}]}{L_{qa}^3}, \quad \mathbf{A}(a) = \frac{\gamma \cdot \mu_0}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{p}}{L_{qa}}. \quad (5.27')$$

Если электроды находятся на оси Z системы r, φ, z в точках с координатами $z_{1,2} = \mp L/2$, то $L_{qa}^2 = r^2 + z^2$, $\sin(\mathbf{L}, \mathbf{L}_{qa}) = (r / \sqrt{r^2 + z^2})$,

$$\mathbf{V} = \mathbf{1}_\varphi \cdot B_\varphi, \quad B_\varphi = \frac{\gamma \cdot \mu_0}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{r \cdot p}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{1}_z \cdot A_z, \quad A_z = \frac{\gamma \cdot \mu_0}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{p}{(r^2 + z^2)^{1/2}}. \quad (5.27'')$$

В случае неограниченной однородной магнитной среды, о которой будет речь в разделе I, § 6, надо в (5.27') и (5.27'') вместо μ_0 подставить μ_a .

2. Поле точечного электрода \mathcal{E} на поверхности однородного проводящего полупространства (на плоской границе земля – воздух).

Возьмём систему r, φ, z с осью Z , направленной вертикально вниз, и с началом в точке \mathcal{E} (рис. 5.9). Поле \mathbf{j} обладает чётной цилиндрической симметрией относительно оси Z , поэтому $B_r = 0$, $B_z = 0$, $\mathbf{V} = \mathbf{1}_\varphi \cdot B_\varphi(r, z)$. Применить формулу (5.26) можно только к взятому в целом току I_S (по всей

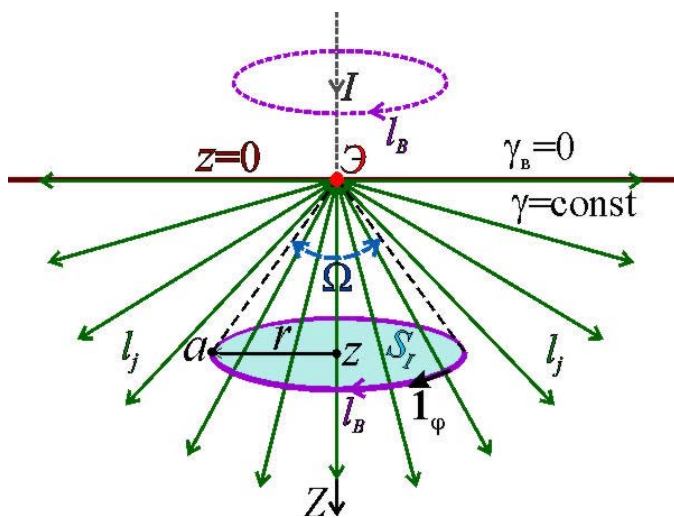


Рис. 5.9.

К магнитному полю точечного электрода \mathcal{E} , расположенного на поверхности однородного проводящего полупространства

для верхнего полупространства, надо считать $I_S = I$. При $z > 0$, т. е. для нижнего полупространства, надо принять во внимание, что окружность l_B с осью по оси Z (векторная линия l_B), проведенная через точку a , охватывает не весь ток I , а только его долю I_S , попадающую в конус C с поверхностью $r/z = \text{const}$, проходящей через точку a . Но ввиду сферической симметрии (при $z > 0$) поля \mathbf{j} относительно точки \mathcal{E} доля $I_S = I \cdot \Omega / 2\pi$, где $\Omega = 2\pi \cdot [1 - z \cdot (r^2 + z^2)^{-1/2}]$ – телесный угол при вершине \mathcal{E} конуса C (см. рис. В.12 в разделе "Введение" в части I). Таким образом, "

длине токовых линий). Поэтому прибавим к электроду \mathcal{E} линию, питающую его током I , а для того, чтобы сохранить осевую симметрию, вообразим, что эта линия совпадает с верхней (отрицательной) полуосью Z . Таким образом, получаем цепь тока I , замыкающуюся по бесконечно удалённой линии. Определим поле \mathbf{V}^0 , создаваемое этим током в точке $a(r, z)$. Согласно (5.26) $\mathbf{V}^0 = \mathbf{1}_\varphi \cdot \mu_0 \cdot I_S / 2\pi \cdot r$. При $z \leq 0$, т. е. для верхнего полупространства, надо

воздухе" (при $z \leq 0$) $\mathbf{V}^0 = \mathbf{1}_\varphi \cdot \mu_0 \cdot I_S / 2\pi \cdot r$, а "в земле" (при $z > 0$) $\mathbf{V}^0 = \mathbf{1}_\varphi \cdot (\mu_0 \cdot I / 2\pi \cdot r) \cdot [1 - z \cdot (r^2 + z^2)^{-1/2}]$. Чтобы получить поле \mathbf{V} , надо из \mathbf{V}^0 вычесть поле \mathbf{V}^B воображаемого тока I по отрицательной полуоси Z от $z_1 = -\infty$ до $z_2 = 0$.

Согласно (5.22'')₂ $\mathbf{V}^B = \mathbf{1}_\varphi \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)$, следовательно, в воздухе

$\mathbf{V} = \mathbf{1}_\varphi \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)$, а в земле $\mathbf{V} = \mathbf{1}_\varphi \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)$. Объединяя эти

выражения, получаем

$$\mathbf{V} = \mathbf{1}_\varphi \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right). \quad (5.28)$$

Однако важно иметь в виду, что к этой формуле *при $z > 0$ и при $z \leq 0$ мы пришли разными путями*. При $z > 0$ формула (5.28) получается благодаря сферической симметрии поля \mathbf{j} в нижнем полупространстве, а при $z \leq 0$ она получена без этого условия. Поэтому для воздуха и для плоскости $z=0$ формула (5.28) применима также при любых нарушениях однородности проводящей среды в нижнем полупространстве, не нарушающих её цилиндрическую симметрию относительно вертикальной, прямой, проходящей через электрод \mathcal{E} . В частности, формула (5.28) при $z \leq 0$ применима в случае, когда в земле удельная электропроводность $\gamma = \gamma(z)$, где $\gamma(z)$ – любая функция глубины z . Что же касается поля \mathbf{V} в земле, то при сохранении симметрии поля относительно оси Z надо ещё определить отношение $I_S / I = m$ и ввести $I_S = m \cdot I$ в выражение для поля \mathbf{V}^0 . Интересно отметить, что формула (5.28) при $z \leq 0$ совпадает с (5.22'')₁ и, следовательно, электрод \mathcal{E} (его ток эмиссии) в отношении образования в верхнем полупространстве поля \mathbf{V} эквивалентен току по положительной полуоси Z (вниз).

3. Цепь тока с точечными электродами \mathcal{E}_k на плоской поверхности горизонтально однородного полупространства. В соответствии с изложенным выше магнитное поле, создаваемое на поверхности $z=0$ и над ней каждым электродом \mathcal{E}_k с эмиссией I_k , определяется как поле тока I_k по вертикальной полупрямой от точки \mathcal{E}_k до бесконечности. Эти поля имеют *только горизонтальные компоненты*. Наоборот, поле, создаваемое лежащей на плоскости $z=0$ линейной частью цепи, имеет на этой плоскости *только вертикальную компоненту*.

III. Скалярный потенциал магнитного поля постоянного тока

Для пространства, взятого в целом, согласно (5.19)₁ поле \mathbf{V} не является потенциальным ($\text{rot } \mathbf{V} \neq 0$), но для областей пространства вне токового кольца, где $\mathbf{j}=0$, $\text{rot } \mathbf{V}=0$ и, следовательно, в соответствии с (1.62) $\mathbf{V} = \text{grad } T$. Всё пространство вне токового кольца K является двухсвязной областью, в которой возможны контуры l^α , сцепленные с кольцом K (такие контуры, а также контуры l^β , не сцепленные с токовым кольцом, показаны на **рис. 4.10**). Поэтому в соответствии с изложенным в § 6 первой главы скалярный

потенциал поля \mathbf{B} должен быть многозначным. Но если ограничиться изучением поля в односвязной части пространства, то получается потенциал однозначный. Такой областью, например, окажется пространство вне токового кольца, если из него изъять слой, перегораживающий отверстие кольца, вследствие чего исчезнут контуры l^α . Слой этот может быть любой толщины и, в частности, его можно свести к поверхности, опирающейся на токовую линию, взятую на поверхности кольца K . Применяя такую «запретную перегородку», мы превращаем почти всё пространство вне кольца в односвязную область с однозначным потенциалом, от которого нетрудно перейти к многозначному потенциалу.

Ограничиваясь изучением поля, создаваемого замкнутым линейным током по контуру l , определим потенциал U_I поля \mathbf{B} в пространстве, из которого изъят только не занимающий объёма контур тока $l[S_I]$ и некоторая опирающаяся на него поверхность S_I – поверхность тока с нормалью n_I , образующей с ним правовинтовую систему (см. [рис. 5.8, б](#)).

Можно доказать ([Альпин, 1966], с. 323, 324), что

$$\oint_{l[S_I]} \frac{[d\mathbf{l} \mathbf{L}_{qa}]}{L_{qa}^3} = -\text{grad } \omega_I = -\nabla \omega_I, \quad \text{где} \quad \omega_I = \int_{S_I} \frac{(d\mathbf{S} \mathbf{L}_{qa})}{L_{qa}^3} \quad (5.29)$$

– угол видимости поверхности S_I из точки a , а левая часть (5.29)₁ согласно (5.11) равна $4\pi \cdot \mathbf{B}(a) / (\mu_0 \cdot I)$. Следовательно, из (5.29) получаем

$$\mathbf{B}(a) = -\mu_0 \cdot \nabla U_I(a), \quad \text{где} \quad U_I(a) = (I/4\pi) \cdot \omega_I(a) + C, \quad (5.29')$$

а угол $\omega_I(a)$, аналогичный углу Q , определяемому формулой (2.64), положителен, когда к точке a обращена лицевая сторона тока (поверхности S_I). Согласно (5.5) выражение (5.29')₂ совпадает с выражением $U = \eta \cdot Q/4\pi$, которое получается из (2.66') и (2.115)₄ для потенциала поля \mathbf{B}/μ_0 ($=\mathbf{H}$), создаваемого однородным двойным магнитным слоем.

Мы опять убеждаемся в эквивалентности линейного тока магнитному листку (магнитному двойному слою, см. [рис. 5.8](#)). Отмеченная эквивалентность справедлива также в отношении тока по виткам соленоида ([рис. 5.2, б](#)), поверхностного тока на поверхности цилиндра ([рис. 5.2, а](#)), элементарных токов, заполняющих этот цилиндр. Поэтому, наблюдая магнитное поле элементарных замкнутых токов, мы можем представить себе, будто это поле создают элементарные магниты ([рис. 3.2, з](#)) с такими же моментами.

Согласно (5.29') поведение потенциала $U_I(a)$ и, в частности, его изменение при перемещении точки a по какому-либо контуру l^α полностью определяется изменением угла $\omega_I(a)$. При переходе от лицевой стороны поверхности S_I к её оборотной стороне ([рис. 5.8, б](#)) угол ω_I уменьшается на 4π , чему соответствует уменьшение потенциала U_I на I . Но этот разрыв не реальный, так как работа при переходе через "мысленно построенную" поверхность S_I , очевидно, равна нулю. Для устранения формального разрыва мы после каждого прохождения точки a через поверхность S_I с лицевой стороны на оборотную или в обратном направлении можем соответственно

увеличивать или уменьшать на I потенциалы всех точек контура l^α , определяемые формулой (5.29')₂. В результате получим непрерывно меняющийся угол видимости ω_I и непрерывный (но многозначный) потенциал U_I . Такое устранение разрывов ω_I и U_I соответствует исчезновению запретной перегородки, вследствие которого пространство (без контура тока) оказывается двухсвязным.

Пример. Скалярный потенциал магнитного поля прямолинейного тока. Рассмотрим случай тока I по контуру, лежащему в полуплоскости $\varphi=\pi/2$ системы r, φ, z и состоящему из оси Z (с током в сторону увеличения координаты z) и полуокружности $r^2+z^2=\infty$. Фактически, очевидно, идёт речь о поле тока по оси Z .

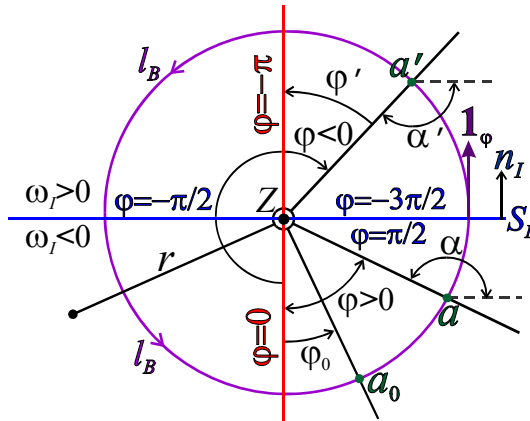


Рис. 5.10.

Построение, поясняющее вывод выражения для скалярного потенциала магнитного поля тока I по оси Z , нормальной к плоскости рисунка.

Ток I и ось Z направлены к читателю, α и α' – плоские углы видимости луча $\varphi=\text{const}$ в плоскости $z=\text{const}$ из точек a и a' этой плоскости

Согласно (5.27) поле $\mathbf{B}=\mathbf{1}_\varphi \cdot \mu_0 \cdot I/2\pi \cdot r$. На оси Z , т. е. при $r=0$, это выражение теряет смысл, а область $r>0$ (пространство без оси Z) является двухсвязной. Для того чтобы её сделать односвязной, будем считать полуплоскость $\varphi=\pi/2$ "запретной перегородкой", т. е. допустим, что $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$.

Поверхность S_I – полуплоскость $\varphi=\pi/2$ с нормалью $n_I \parallel \mathbf{1}_\varphi$ видна из полупространств $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ и $-\pi < \varphi < -\pi/2$ под углами ω_I равными -2α и $+2\alpha'$, где $\alpha=\varphi+\pi/2$ и $\alpha'=\varphi'+\pi/2$ – плоские углы, показанные на рис. 5.10, а $\varphi'=-\varphi-\pi$. Таким образом, всюду $\omega_I=-\pi-2\varphi$ и согласно (5.29') $U_I(a)=-\frac{I}{2\pi} \cdot \varphi_a + C'$, где $C'=C-I/4$. То же (с точностью до постоянной) получим, исходя из напряжения \mathcal{E}_{a_0a} в поле \mathbf{B}/μ_0 на пути a_0a по векторной линии l_B .

Действительно,

$$\mathcal{E}_{a_0a} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \int_{a_0}^a \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_B = U_I(a_0) - U_I(a),$$

$U_I(a) = U_I(a_0) - \mathcal{E}_{a_0a}$. Но произведение $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_B = (\mu_0 \cdot I/2\pi \cdot r) \cdot r \cdot d\varphi = (\mu_0 \cdot I/2\pi) \cdot d\varphi$, поэтому $\mathcal{E}_{a_0a} = (I/2\pi) \cdot (\varphi_a - \varphi_0)$ и, следовательно, $U_I(a) = -(I/2\pi) \cdot \varphi_a + C''$; здесь $C'' = (I/2\pi) \cdot \varphi_0 + U_I(a_0)$. При $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ имеем $3 \cdot I/4 > U_I(a) - C'' > -I/4$. Разрыв U_I на перегородке равен $(3/4) \cdot I - (-1/4) \cdot I = I$.

Теперь уберём перегородку, т. е. отменим пределы изменения угла φ . Допустим, что $\varphi_a = \varphi_0 \pm 2\pi \cdot k + (\varphi_{\text{гл}} - \varphi_0)$. Это означает, что отправившись из точки a_0 и двигаясь по линии l_B (по или против направления отсчёта φ), мы сделали k оборотов вокруг оси Z и ещё "прошли" дугу a_0a , измеряемую углом $\varphi_{\text{гл}} - \varphi_0$, где $\varphi_{\text{гл}}$ – главное значение угла φ_a .

При этом мы совершили работу $\mathcal{E}_{a_0a} = (I/2\pi) \cdot (\varphi_a - \varphi_0) = (I/2\pi) \cdot (\varphi_{\text{гл}} - \varphi_0) \pm k \cdot I$. Поэтому в точке a потенциал $U_I(a) = U_I(a_0) - \mathcal{E}_{a_0a} = U_I(a_0) - (I/2\pi) \cdot \varphi_{\text{гл}} + (I/2\pi) \cdot \varphi_0 \mp k \cdot I = -(I/2\pi) \cdot \varphi_{\text{гл}} + C_{\text{мн}}$, где $C_{\text{мн}} = U_I(a_0) + (I/2\pi) \cdot \varphi_0 \mp k \cdot I$ – многозначная постоянная (не зависящая от положения точки a).

IV. Замечания

1. Подставляя в (5.29')₂ выражение (5.29)₂ для угла видимости ω_I и

принимая во внимание (1.127), получаем при $C=0$

$$U_I(a) = \frac{I}{4\pi} \cdot \int_{S_I} \frac{(\mathbf{dS} \mathbf{L}_{qa})}{L_{qa}^3} = \frac{I}{4\pi} \cdot \int_{S_I} \left(\mathbf{dS} \nabla^q \frac{1}{L_{qa}} \right) \quad (5.30)$$

и согласно (5.3')

$$U_I(a) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{S_I} \frac{(\mathbf{dM} \mathbf{L}_{qa})}{L_{qa}^3} = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{S_I} \left(\mathbf{dM} \nabla^q \frac{1}{L_{qa}} \right) \quad (5.30')$$

в соответствии с (2.66). Аналогичные выражения для векторного потенциала

$$\mathbf{A}(a) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_{S_I} \frac{[\mathbf{dM} \mathbf{L}_{qa}]}{L_{qa}^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_{S_I} \left[\mathbf{dM} \nabla^q \frac{1}{L_{qa}} \right] \quad (5.30'')$$

получаются из (5.15).

2. При изучении магнитного поля токового контура на расстояниях от него, больших по сравнению с его линейными размерами, имеем согласно (5.30') и (5.30'')

$$U_I(a) = \frac{(\mathbf{M} \mathbf{L}_{qa})}{4\pi \cdot L_{qa}^3}, \quad \mathbf{A}(a) = \frac{\mu_0 \cdot [\mathbf{M} \mathbf{L}_{qa}]}{4\pi \cdot L_{qa}^3}, \quad (5.31)$$

где \mathbf{M} – магнитный момент тока, определяемый формулой (5.3), а L_{qa} – расстояние точки наблюдения a от средней точки q токового контура. В этом случае можно мысленно заменить ток эквивалентным ему магнитным диполем с моментом $\mathbf{p}=\mathbf{M}=I \cdot \mathbf{S}$, причём полагая $S \rightarrow 0$, мы должны считать, что ток $I \rightarrow \infty$.

3. Потенциалы dU_I и $d\mathbf{A}$ магнитного поля $d\mathbf{B}$ элементарного тока I , т. е. тока по замкнутому контуру элементарных размеров, выражаются формулами (5.31) с подстановкой $d\mathbf{M}$ вместо \mathbf{M} , где $d\mathbf{M}$ – момент элементарного тока I , определяемый формулой (5.3'). Таким образом, элементарный ток эквивалентен в отношении образования магнитного поля \mathbf{B} магнитному диполю с моментом $\mathbf{p}=d\mathbf{M}=I \cdot d\mathbf{S}$ элементарной величины. Иллюстрацией этому, отчасти, может служить рис. 5.8, если представить себе, что размеры контура l очень ("микроскопически") малы.

§ 4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ПРИСУТСТВИИ МАГНИТНОЙ СРЕДЫ

В § 1 третьей главы намагничение магнетика уподоблялось упорядочению ориентации моментов диполей (рис. 3.2, е, з). Теперь на основании изложенного в § 1 и § 3 настоящей главы можем уточнить эту схему, приблизить её к реальности, заменив диполи элементарными токами по чрезвычайно малым контурам $l[dS]$ – молекулярными токами. В отличие от таких токов обычные токи (в проводниках) будем называть макроскопическими. Расположенные хаотически в ненамагниченном магнетике молекулярные токи согласно сказанному в § 1 под действием поля \mathbf{B} (см. (5.2) и рис. 5.1, б) поворачиваются около осей, поперечных полю и их

дипольным моментам. Таким образом, уменьшаются углы отклонения этих моментов от направления поля, в результате чего совокупность молекулярных токов в элементе объёма dV приобретает суммарный дипольный момент $d\mathbf{M}=\mathbf{J}\cdot dV$, отличный от нуля и направленный (в изотропной среде при магнитной восприимчивости $\kappa>0$) по полю \mathbf{B} .

I. Влияние магнитной среды

Молекулярные токи намагниченного, магнетика создают своё магнитное поле. Поэтому в присутствии магнетиков поле

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_{\text{ма}}+\mathbf{B}_{\text{мо}}, \quad (5.32)$$

где $\mathbf{B}_{\text{мо}}$ – поле, создаваемое молекулярными токами, а $\mathbf{B}_{\text{ма}}$ – поле, создаваемое "обычными макроскопическими" токами и определяемое по формулам, приведенным в § 2 для поля \mathbf{B} . В частности, согласно (5.19)₁, (5.14)₁ и (5.17)

$$\text{rot}(\mathbf{B}_{\text{ма}}/\mu_0)=\mathbf{j}, \quad \mathbf{B}_{\text{ма}}=\text{rot} \mathbf{A}_{\text{ма}}, \quad \text{div} \mathbf{A}_{\text{ма}}=0, \quad (5.33)$$

где $\mathbf{A}_{\text{ма}}$ – векторный потенциал поля $\mathbf{B}_{\text{ма}}$, который определяют формулы, приведенные в § 2 для вектора \mathbf{A} .

В соответствии с (5.14)₂ и (5.14')₂ векторный потенциал $\mathbf{A}_{\text{ма}}$ поля $\mathbf{B}_{\text{ма}}$, создаваемого объёмными и поверхностными макроскопическими токами, определяет формула

$$\mathbf{A}_{\text{ма}}(a)=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\int_V\frac{\mathbf{j}}{L_{qa}}dV+\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\int_S\frac{\mathbf{i}}{L_{qa}}dS. \quad (5.34)$$

Для поля $\mathbf{B}_{\text{мо}}$, аналогичного полю $\mathbf{B}_{\text{ма}}$, справедливы формулы, приведенные в § 2, с подстановкой $\mathbf{B}_{\text{мо}}$ и $\mathbf{A}_{\text{мо}}$ вместо \mathbf{B} и \mathbf{A} с заменой макроскопических токов токами молекулярными. Но поле $\mathbf{B}_{\text{мо}}$ мы воспринимаем как поле, создаваемое элементами dV намагниченного магнетика с дипольными моментами $d\mathbf{M}=\mathbf{J}\cdot dV$. Поэтому выведем выражения для $\mathbf{A}_{\text{мо}}$ через намагниченность среды \mathbf{J} . Для этого воспользуемся формулой (5.30'') с подстановкой $d\mathbf{M}=\mathbf{J}\cdot dV$ и заменой поверхностного интегрирования объёмным. Получающаяся при этом в (5.30'') под интегралом функция

$$d\mathbf{A}_{\text{мо}}=\left[\mathbf{dM}\frac{q}{\nabla}\frac{1}{L_{qa}}\right]=-\left[\left(\frac{q}{\nabla}\frac{1}{L_{qa}}\right)\mathbf{J}\right]dV=-\left[\frac{q}{\nabla}\frac{\mathbf{J}}{L_{qa}}\right]dV+\left[\frac{q}{\nabla}\mathbf{J}\right]\cdot\frac{1}{L_{qa}}dV.$$

Следовательно,

$$\mathbf{A}_{\text{мо}}(a)=-\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\int_V^q\frac{\mathbf{J}}{L_{qa}}dV+\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\int_S^q\frac{\text{rot}\mathbf{J}}{L_{qa}}dV. \quad (5.35)$$

Преобразуя первый из этих интегралов согласно (1.38) и принимая во внимание, что в области V могут находиться поверхности S , на которых вектор намагниченности \mathbf{J} терпит разрыв, получаем

$$\mathbf{A}_{\text{мо}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\int_V\frac{\text{rot}\mathbf{J}}{L_{qa}}dV+\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\oint_{S[V]}\frac{[\mathbf{J}\mathbf{dS}]}{L_{qa}}dS+\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\oint_{S_{\text{бп}}}\frac{[\mathbf{J}\mathbf{dS}]}{L_{qa}}dS. \quad (5.35')$$

Здесь $S[V]$ – наружная граница области V ; $S_{\text{бп}}$ – поверхности безопасности, выделяющие из области V поверхности разрыва S вектора \mathbf{J} и стягиваемые к этим поверхностям разрыва.

Распространяя объёмное интегрирование на всё пространство, будем считать $S[V]$ бесконечно удалённой поверхностью и поэтому полагать второй из интегралов в правой части (5.35') равным нулю. Если ещё принять во внимание (1.54'), (1.54''), то получим из (5.35')

$$\mathbf{A}_{\text{мо}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \frac{\text{rot } \mathbf{J}}{L_{qa}} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_S \frac{\text{Rot } \mathbf{J}}{L_{qa}} dS, \quad (5.36)$$

где объёмное интегрирование проводится по всему пространству, а поверхностное интегрирование – по всем поверхностям разрыва тангенциальной компоненты вектора \mathbf{J} .

На поверхности $S_{\text{бп}}$ в (5.35') нормаль внутренняя, а на поверхности S_0 в (1.54'') – наружная. Этим объясняется знак плюс при втором члене в правой части (5.36).

II. Эквивалентные плотности молекулярных токов

Полученное для вектора $\mathbf{A}_{\text{мо}}$ выражение (5.36) аналогично выражению (5.34) для $\mathbf{A}_{\text{ма}}$. Поэтому будем рассматривать величины $\text{rot } \mathbf{J}$ и $\text{Rot } \mathbf{J}$, как объёмную и поверхностную плотности \mathbf{j}' и \mathbf{i}' тока, эквивалентного совокупности молекулярных токов. Таким образом, положим

$$\text{rot } \mathbf{J} = \mathbf{j}', \quad \text{Rot } \mathbf{J} = \mathbf{i}' \quad (5.37)$$

и получим для вектора $\mathbf{A}_{\text{мо}}$ выражение

$$\mathbf{A}_{\text{мо}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \frac{\mathbf{j}'}{L_{qa}} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \oint_S \frac{\mathbf{i}'}{L_{qa}} dS. \quad (5.34')$$

Нетрудно убедиться, что возбудители поля $\mathbf{B}_{\text{мо}}$ действительно представляют собой поверхностные и объёмные токи, плотности которых должны быть равны производным $\text{rot } \mathbf{J}$ и $\text{Rot } \mathbf{J}$. Сначала обратимся к выражению (5.37)₂, согласно которому

$$\mathbf{i}' = [\mathbf{n} (\mathbf{J}^{(2)} - \mathbf{J}^{(1)})]. \quad (5.37')$$

В частном случае, когда $\mathbf{J}^{(2)} = 0$, $\mathbf{J}^{(1)} = \mathbf{J}$, например на поверхности соприкосновения намагниченного тела 1 с ненамагниченной средой 2 , имеем $\mathbf{i}' = -[\mathbf{n} \mathbf{J}]$, т. е. на такой поверхности должен быть поверхностный ток с плотностью i' , равной компоненте J_τ вектора \mathbf{J} (в намагниченном теле). Этот случай иллюстрирует пример однородно намагниченного цилиндра, приведенный в § 1 (см. рис. 5.2). У боковой поверхности этого цилиндра $\mathbf{J}^{(2)} = 0$, $\mathbf{J}^{(1)} = \mathbf{J}$, а у его оснований $\mathbf{J}^{(2)} = 0$, векторное произведение $[\mathbf{n} \mathbf{J}^{(1)}] = 0$. В соответствии с изложенным выше плотность $i' = |\mathbf{i}'|$ поверхностного тока на боковой поверхности цилиндра должна быть равна $J = |\mathbf{J}|$. Такой согласно (5.8'') поверхностный ток мы получили в § 1.

От рассмотренного случая можно перейти к случаю соприкосновения двух магнетиков по поверхности, параллельной вектору \mathbf{J} , и убедиться, что если этот вектор имеет в них различные значения, то на ней существует поверхностный ток с плотностью, соответствующей формуле (5.37').

Переходя от одной поверхности раздела к совокупности параллельных поверхностей раздела, а затем, заменяя ступенчатое изменение вектора \mathbf{J} непрерывным его изменением, получаем вместо поверхностных токов объёмный ток с плотностью, соответствующей формуле (5.37)₁.

Аналогичный переход был сделан более детально (в § 1 главы третьей) от поверхностных (связанных) масс к объёмным (связанным) массам.

Суммарное поле $\mathbf{B}=\mathbf{B}_{\text{ма}}+\mathbf{B}_{\text{мо}}$ представляет собой ротор суммы векторных потенциалов $\mathbf{A}_{\text{ма}}$ и $\mathbf{A}_{\text{мо}}$ полей $\mathbf{B}_{\text{ма}}$ и $\mathbf{B}_{\text{мо}}$

$$\mathbf{B}=\text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}=\mathbf{A}_{\text{ма}}+\mathbf{A}_{\text{мо}} \quad (5.38)$$

и, следовательно, согласно (5.34) и (5.34')

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \frac{\mathbf{j}+\mathbf{j}'}{L_{qa}} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_S \frac{\mathbf{i}+\mathbf{i}'}{L_{qa}} dS. \quad (5.38')$$

Для векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} справедливы формулы, приведенные в § 2, с подстановкой $\mathbf{j}+\mathbf{j}'$ и $\mathbf{i}+\mathbf{i}'$ вместо \mathbf{j} и \mathbf{i} . В частности, к правой части (5.18') надо прибавить $-\mu_0 \cdot \mathbf{j}'$. Таким образом,

$$\text{rot } \mathbf{A}=\mathbf{B}, \quad \nabla^2 \mathbf{A}=-\mu_0 \cdot (\mathbf{j}+\mathbf{j}'). \quad (5.39)$$

Из аналогии выражения (5.38') выражению (5.14') следует, что на любой поверхности S вектор \mathbf{A} непрерывен, за исключением поверхности, несущей двойной поверхностный ток (продольно намагниченной поверхности при $J_\tau=\infty$), на которой компонента A_τ терпит разрыв. См. дополнение 1 к § 1.

Принимая во внимание (1.74) и (1.80) и полагая $\text{div } \mathbf{A}=0$, получаем из (5.39) вместо (5.19) систему уравнений

$$\text{I. rot } \mathbf{B}=\mu_0 \cdot (\mathbf{j}+\mathbf{j}'), \quad \text{II. div } \mathbf{B}=0. \quad (5.40)$$

Согласно уравнениям (5.40) поле \mathbf{B} не имеет источников (линии индукции l_B нигде не обрываются); оно является чисто вихревым; его возбудители (вихревые линии) находятся там, где располагаются обычные (макроскопические) или молекулярные токи и плотность этих возбудителей (густота вихревых линий) пропорциональна суммарной плотности этих токов.

III. Магнитный аналог вектора \mathbf{D}

Выше вместо неощутимых непосредственно молекулярных токов ввели векторы \mathbf{j}' и \mathbf{i}' , которые согласно (5.37) являются функциями макроскопически воспринимаемой нами намагниченности магнетика \mathbf{J} (магнитного момента единицы объёма). Однако намагниченность магнетика зависит от поля, в котором он находится и, следовательно, не может быть задана произвольно при расчёте магнитного поля. Поэтому выражение (5.38') и уравнения (5.39), (5.40) в общем случае практически не пригодны для расчёта поля. Но, подставляя в (5.40)₁ $\mathbf{j}'=\text{rot } \mathbf{J}$, получаем

$$\text{rot } \mathbf{B}-\mu_0 \cdot \text{rot } \mathbf{J}=\mu_0 \cdot \mathbf{j}, \quad \text{т. е.} \quad \text{rot } (\mathbf{B}/\mu_0-\mathbf{J})=\mathbf{j}. \quad (5.41)$$

Поэтому, обозначая

$$\mathbf{B}/\mu_0-\mathbf{J}=\mathbf{H}, \quad \text{имеем} \quad \text{rot } \mathbf{H}=\mathbf{j}. \quad (5.41')$$

В правую часть уравнения (5.41')₂ входит плотность только

макроскопических токов, задаваемая независимо от магнитного поля.

Итак, для того чтобы освободить уравнения магнитного поля постоянного тока от неудобных для нас зависимых возбудителей поля \mathbf{B} , мы перешли от этого силового поля к вспомогательному полю \mathbf{H} , вихревые возбудители которого совпадают с независимыми возбудителями поля \mathbf{B}/μ_0 – электрическими токами.

Соотношение (5.41')₁, которым мы здесь ввели вектор \mathbf{H} , совпадает с соотношением (3.15)₂ между векторами \mathbf{B} и \mathbf{H} . Но здесь векторы \mathbf{B} и \mathbf{H} поменялись ролями. Вектор \mathbf{H} оказался магнитным аналогом вектора \mathbf{D} , а вектор \mathbf{B} – аналогом вектора \mathbf{E} , что вполне естественно, так как \mathbf{B} и \mathbf{E} – силовые векторы.

Правые части уравнений (5.33)₁ и (5.41')₂ совпадают. Тем не менее в общем случае поле $\mathbf{B}_{\text{ма}}$ не совпадает с полем $\mu_0 \cdot \mathbf{H}$; оно является *вихревой частью* поля $\mu_0 \cdot \mathbf{H}$. Но в вакууме или в немагнитной среде (при $\mathbf{J}^0=0$ и $\mu=1$) имеем $\mu_0 \cdot \mathbf{H} = \mathbf{B}_{\text{ма}} = \mathbf{B}$.

§ 5. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ПРИСУТСТВИИ МАГНИТНОЙ СРЕДЫ

I. Уравнения поля \mathbf{B} , \mathbf{H}

Заменяя в (5.40) первое уравнение уравнением (5.41')₂, получаем систему уравнений:

$$\text{I. } \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \text{II. } \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (5.42)$$

свободную от указанного в предыдущем параграфе недостатка системы (5.40).

Дифференциальным уравнениям системы (5.42) соответствуют уравнения магнитного поля в интегральной форме

$$\oint_{[S]} (\mathbf{H} \, d\mathbf{l}) = I_S, \quad \oint_{[V]} (\mathbf{B} \, d\mathbf{S}) = 0, \quad \text{где } I_S = \int_S (\mathbf{j} \, d\mathbf{S}), \quad (5.43)$$

аналогичные интегральным формам (5.19') уравнений (5.19) поля \mathbf{B} .

Интегрируя обе части первого уравнения системы (5.42) по некоторой области V и применяя (1.38), получаем равенство

$$\oint_{S[V]} [d\mathbf{S} \, \mathbf{H}] = \int_V \mathbf{j} \, dV, \quad (5.44)$$

которое можно рассматривать как иной (векторный) вид интегральной формы уравнения поля \mathbf{H} .

Выясним, как ведёт себя поле у поверхности S (разделяющей области пространства V_1 и V_2), на которой в общем случае имеется поверхностный ток с плотностью \mathbf{i} . Построим, как показано, на **рис. 1.8** в главе первой, замкнутую поверхность s , ограничивающую цилиндр \mathcal{C} , поперечным сечением которого является участок ΔS поверхности S , и будем стягивать поверхность s к участку ΔS . Согласно (1.54) и (1.48) при малых размерах

участка ΔS

$$\oint_s [\mathbf{dS} \mathbf{H}] = \Delta S \cdot \text{Rot} \mathbf{H}, \quad \oint_s (\mathbf{B} \mathbf{dS}) = \Delta S \cdot \text{Div} \mathbf{B}. \quad (5.45)$$

Применяя (5.44) и (5.43)₂ к поверхности s и ограничиваемой ею области \mathcal{U} , имеем

$$\oint_s [\mathbf{dS} \mathbf{H}] = (\mathbf{j}_\tau + \mathbf{j}_n) \cdot \Delta S \cdot h = \mathbf{i} \cdot \Delta S, \quad \oint_s (\mathbf{B} \mathbf{dS}) = 0, \quad (5.45')$$

где \mathbf{j}_τ и \mathbf{j}_n – (полная) тангенциальная и нормальная компоненты вектора \mathbf{j} на поверхности S , h – высота цилиндра \mathcal{U} , которая стремится к нулю; $\mathbf{j}_n \cdot h \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$; $\mathbf{j}_\tau \cdot h = \mathbf{i}$ в соответствии с (4.7').

Сопоставляя равенства (5.45) и (5.45'), получаем поверхностные формы уравнений магнитного поля

$$\text{Rot} \mathbf{H} = \mathbf{i}, \quad \text{Div} \mathbf{B} = 0 \quad (5.46)$$

или (считая $H_n \neq \infty$ и $B_\tau \neq \infty$)

$$[\mathbf{n} (\mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)})] = \mathbf{i}, \quad (\mathbf{n} (\mathbf{B}^{(2)} - \mathbf{B}^{(1)})) = 0, \quad (5.46')$$

откуда согласно (1.4)

$$H_t^{(2)} - H_t^{(1)} = ([\mathbf{n} \mathbf{t}] \mathbf{i}), \quad B_n^{(2)} - B_n^{(1)} = 0. \quad (5.46'')$$

Таким образом, нормальная компонента вектора \mathbf{B} непрерывна на любой поверхности, а полная тангенциальная компонента вектора \mathbf{H} на поверхности S , на которой имеется поверхностный ток, терпит разрыв, равный плотности i этого тока.

При $\mathbf{i} = 0$ равенства (5.46'') совпадают с (3.41)_{3,4}. Т. е. если на S нет поверхностного тока и объёмная плотность тока $j \neq \infty$, то компоненты H_t, B_n непрерывны на S :

$$H_t^{(2)} = H_t^{(1)}, \quad B_n^{(2)} = B_n^{(1)}. \quad (5.46''')$$

II. Уравнение связи

Уравнения системы (5.42) определяют разные поля: \mathbf{B} и \mathbf{H} , её надо дополнить уравнением связи между этими полями. Соотношение между векторами \mathbf{B} и \mathbf{H} задано определением (5.41')₁. Но это определение содержит намагниченность \mathbf{J}^{BP} , находящуюся в зависимости от намагничивающего поля. Для того чтобы введение вспомогательного вектора \mathbf{H} имело смысл, надо, пользуясь этой зависимостью, ввести вместо вектора $\mathbf{J}^{\text{BP}} = \mathbf{J} - \mathbf{J}^0$ параметр магнитной среды.

В дальнейшем изложении необходимо исходить из некоторого определённого соотношения между намагниченностью, намагничивающим полем и средой, причём, исключая из рассмотрения неидеализированные ферромагнетики, можно считать намагниченность линейно зависящей от вектора, характеризующего магнитное поле. В соответствии с изложенным в этой главе следовало бы взять в качестве такого вектора индукцию \mathbf{B} . Но придерживаясь магнитостатической традиции, принимают соотношение (3.18')₂: $\mathbf{J} = \alpha \cdot \mathbf{H} + \mathbf{J}^0$. Подставляя это соотношение в (5.41')₁, получаем $\mathbf{B} = \mu_0 \cdot (1 + \alpha) \cdot \mathbf{H} + \mu_0 \cdot \mathbf{J}^0$ или (обозначая $1 + \alpha = \mu$) $\mathbf{B} = \mu_0 \cdot (\mu \cdot \mathbf{H} + \mathbf{J}^0)$ в соответствии с (3.19'')₂. Итак, имеем уравнение связи

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_a - \mathbf{J}^0/\mu. \quad (5.47)$$

Входящие в эти уравнения величины имеют следующие размерности: $[B]=\text{Тл}$, $[H]=[J]=\text{А/м}$, $[\mu_a]=[\mu_0]=\text{Гн/м}$, а μ и μ_a – безразмерные величины.

Учтём, что поле \mathbf{H} , определяемое выражением (5.47), в отличие от полей \mathbf{B}/μ_0 , $\mathbf{B}_{\text{ма}}/\mu_0$ не является чисто вихревым:

$$\text{div } \mathbf{H} = -\frac{1}{\mu_0 \cdot \mu^2} (\mathbf{B} \nabla \mu) - \left(\nabla \frac{\mathbf{J}^0}{\mu} \right); \quad (5.47')$$

следовательно, в общем случае $\text{div } \mathbf{H} \neq 0$.

III. Уравнение векторного потенциала

Подставляя в уравнение связи (5.47) решение $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ второго уравнения системы (5.42), получаем для поля \mathbf{H} выражение

$$\mathbf{H} = \frac{\text{rot } \mathbf{A}}{\mu_a} - \frac{1}{\mu} \cdot \mathbf{J}^0 = \frac{[\nabla \mathbf{A}]}{\mu_a} - \frac{1}{\mu} \cdot \mathbf{J}^0. \quad (5.48)$$

Подстановка этого выражения в первое уравнение системы (5.42) приводит к уравнению

$$\left[\nabla \frac{[\nabla \mathbf{A}]}{\mu} \right] = \mu_0 \cdot \mathbf{j} + \mu_0 \cdot \left[\nabla \frac{\mathbf{J}^0}{\mu} \right] \quad \text{или} \quad \text{rot} \frac{\text{rot } \mathbf{A}}{\mu} = \mu_0 \cdot \mathbf{j} + \mu_0 \cdot \text{rot} \frac{\mathbf{J}^0}{\mu} \quad (5.49)$$

для векторного потенциала \mathbf{A} магнитного поля, создаваемого токами и магнитами в присутствии магнитной среды.

Принимая во внимание, что согласно (1.80) $\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$, имеем

$$\mu \cdot \left[\nabla \frac{[\nabla \mathbf{A}]}{\mu} \right] = [\nabla [\nabla \mathbf{A}]] + \frac{1}{\mu} \cdot [[\nabla \mathbf{A}] \nabla \mu] = \nabla(\nabla \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{\mu} \cdot [[\nabla \mathbf{A}] \nabla \mu].$$

Полагая $\text{div } \mathbf{A} = (\nabla \mathbf{A}) = 0$, получаем из (5.49)

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{\mu} \cdot [[\nabla \mathbf{A}] \nabla \mu] = -\mu_a \cdot \mathbf{j} - \mu_a \cdot \left[\nabla \frac{\mathbf{J}^0}{\mu} \right]. \quad (5.49')$$

Для поля вне магнитов (при $\mathbf{J}^0 = 0$) вторые члены правых частей в (5.49), (5.49') обращаются в нуль и, следовательно,

$$\left[\nabla \frac{[\nabla \mathbf{A}]}{\mu} \right] = \mu_0 \cdot \mathbf{j}, \quad \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{\mu} \cdot [[\nabla \mathbf{A}] \nabla \mu] - \mu_a \cdot \mathbf{j}. \quad (5.49'')$$

IV. Решение уравнения вектора \mathbf{A}

Рассмотрим применение уравнения (5.49) к решению прямой задачи теории магнитного поля постоянного тока, т. е. к определению потенциала \mathbf{A} этого поля в области V по заданным в ней функциям $\mathbf{j}(q)$, $\mu(q)$, $\mathbf{J}^0(q)$.

В § 8 первой главы была выведена теорема единственности решения уравнения (1.96)₂, указывающая, какие условия достаточны для обеспечения единственности его решения. Для перехода к уравнению (5.49) и к условиям единственности его решения надо положить в уравнении (1.96)₂ функцию

возбуждения

$$\mathbf{W}^v(a) = \mu_0 \cdot \mathbf{j} + \mu_0 \cdot [\nabla (\mathbf{J}^0 / \mu)]. \quad (5.50)$$

Краевые условия IV и V типов сводятся к заданию тангенциальных компонент \mathbf{A}_τ и \mathbf{B}_τ векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} на границе $S[V]$ области V , а условие IVa означает задание вектора \mathbf{A} на поверхности $S[V]$.

Ниже (до конца параграфа) пойдёт речь о поле вне магнитов и поэтому будем полагать $\mathbf{J}^0 = 0$.

Если в области V нет особых поверхностей и особых линий, то заданием функций μ и \mathbf{j} в области V и тангенциальной компоненты вектора \mathbf{A} или вектора \mathbf{B} на её границе $S[V]$ магнитное поле \mathbf{B} , \mathbf{H} определяется полностью, а поле \mathbf{A} – с точностью до градиента произвольной скалярной функции, гармонической, если задана дивергенция вектора \mathbf{A} . Если, кроме того, задана нормальная компонента вектора \mathbf{A} на поверхности $S[V]$, то этот вектор определяется полностью во всей области V .

Особыми линиями являются линии, по которым заданы линейные токи, а особыми поверхностями – поверхности разрыва функции μ (поверхности раздела между средами с различной магнитной проницаемостью), а также поверхности, на которых заданы поверхностные токи.

Если в области V есть особые поверхности и линии, то для обеспечения единственности решения надо к краевым условиям добавить условия у этих поверхностей и линий. Для поверхности, на которой компоненты $B_\tau \neq \infty$, такими условиями будут условия сопряжения в (1.124'). Согласно, (5.46')₁ и сказанному выше (раздел II § 4) о непрерывности вектора \mathbf{A} , в этих условиях следует положить

$$\mathbf{N}_{12} = 0, \quad \mathbf{P}_{12} = \mu_0 \cdot \mathbf{i}, \quad (5.51)$$

после чего они принимают вид

$$[\mathbf{n} \mathbf{A}^{(2)}] = [\mathbf{n} \mathbf{A}^{(1)}], \quad \frac{1}{\mu_2} \cdot [\mathbf{n} [\nabla \mathbf{A}^{(2)}]] - \frac{1}{\mu_1} \cdot [\mathbf{n} [\nabla \mathbf{A}^{(1)}]] = \mu_0 \cdot \mathbf{i}. \quad (5.51')$$

Таким образом, условия сопряжения на поверхности S сводятся к требованию непрерывности тангенциальной компоненты вектора \mathbf{A} и разрыва, равного $([\mathbf{n} \mathbf{t}] \mathbf{i})$, тангенциальной компоненты H_t вектора \mathbf{H} (см. (5.46'')).

Фактически обычно оказывается непрерывным вектор \mathbf{A} , так как $\text{Div} \mathbf{A} = 0$.

Если на поверхности S нет поверхностного тока ($\mathbf{i} = 0$), то условия сопряжения сводятся к непрерывности тангенциальных компонент векторов \mathbf{A} и \mathbf{H} .

Условие у особой линии (у линейного тока I) получается в виде предельного выражения из (5.43)₁ подстановкой $I_S = I$ и стягиванием контура l к точке особой линии (см. (5.54), (5.57)).

§ 6. ПОЛЕ В ОДНОРОДНОЙ МАГНИТНОЙ СРЕДЕ

Если в области V $\text{grad} \mu = \nabla \mu = 0$ и $\mathbf{J}^0 = 0$, то в ней система (5.42) и уравнение (5.49') принимают следующий вид

$$\text{I. rot}(\mathbf{B}/\mu)=\mu_0 \cdot \mathbf{j}, \quad \text{II. div}(\mathbf{B}/\mu)=0, \quad \nabla^2(\mathbf{A}/\mu)=-\mu_0 \cdot \mathbf{j}, \quad (5.52)$$

где

$$(\mathbf{B}/\mu)=\text{rot}(\mathbf{A}/\mu), \quad \text{div}(\mathbf{A}/\mu)=0. \quad (5.52')$$

Правые части уравнений (5.52) и уравнений (5.19), (5.18') совпадают. Однако из идентичности возбудителей, находящихся в области V , не следует идентичность полей в этой области, так как возбудители, находящиеся вне области V , могут не совпадать. Поэтому из указанного совпадения правых частей не следует, что поля \mathbf{B}/μ и \mathbf{A}/μ можно определять в области V по формулам (5.11) – (5.13) и (5.14)₂, (5.14'), справедливым для полей \mathbf{B} и \mathbf{A} в вакууме.

I. Поле в неограниченной однородной среде

Если условия $\nabla\mu=0$ и $\mathbf{J}^0=0$ выполняются во всём пространстве, то всюду справедливы равенства (5.52) и (5.52'), а из этого следует, что для полей \mathbf{B}/μ и \mathbf{A}/μ справедливы выражения, полученные для \mathbf{B} и \mathbf{A} в § 2. Поэтому для векторов \mathbf{B} и \mathbf{A} в случае неограниченной однородной среды при отсутствии магнитов ($\mathbf{J}^0=0$) применимы указанные выражения, умноженные на μ . Таким образом, в соответствии с (5.11) – (5.13), (5.14), (5.14') в неограниченной однородной среде при $\mathbf{J}^0=0$

$$4\pi \cdot \mathbf{H}(a) = \int_V \frac{[\mathbf{j} \mathbf{L}_{qa}]}{L_{qa}^3} dV + \int_S \frac{[\mathbf{i} \mathbf{L}_{qa}]}{L_{qa}^3} dS + \sum_k I_k \cdot \oint_{l_k} \frac{[\mathbf{dl} \mathbf{L}_{qa}]}{L_{qa}^3}, \quad (5.53)$$

$$\mathbf{B}(a) = \mu_0 \cdot \mu \cdot \mathbf{H}(a) = \text{rot} \mathbf{A}(a), \quad (5.53')$$

$$\frac{4\pi}{\mu_0 \cdot \mu} \cdot \mathbf{A}(a) = \int_V \frac{\mathbf{j}(q)}{L_{qa}} dV + \int_S \frac{\mathbf{i}(q)}{L_{qa}} dS + \sum_k I_k \cdot \oint_{l_k} \frac{\mathbf{dl}(q)}{L_{qa}}. \quad (5.53'')$$

В § 3 предполагалось, что во всём пространстве $\mu=1$. Из изложенного выше следует, что формулы, полученные в разделе 1 § 3 для магнитных полей симметричных токов, применимы также в случае неограниченной однородной магнитной среды, но с оговоркой о необходимости умножения на μ правых частей (5.22'), (5.22''), (5.26)₂, (5.27). Очевидно, что это справедливо и тогда, когда в пространстве есть нарушения однородности среды, если они находятся на достаточно больших расстояниях от области наблюдения поля и от токов, поле которых заметно в ней.

В частности, если в окрестности элемента $l \cdot \mathbf{dl}$ линейного тока магнитная среда однородна, то в точке a , приближающейся к средней точке q этого элемента имеем согласно (5.27)

$$H(a) \rightarrow Il/(2\pi \cdot r) \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0, \quad (5.54)$$

где r – расстояние от точки q до точки a , взятой в плоскости, нормальной к \mathbf{dl} и проходящей через точку q .

II. Нарушения однородности среды, не искажающие поля

Изменения μ только поперёк поля или только по полю не искажают

поля, не меняют формы его векторных линий сравнительно с полем, создаваемым в вакууме теми же токами и определяемым формулами § 2 и § 3. Объясняется это упрощением уравнений поля. При постоянстве μ по направлению поля скалярное произведение $(\mathbf{B} \nabla \mu) = 0$ и, следовательно, $\operatorname{div} \mathbf{B} = \mu_a \cdot \operatorname{div} \mathbf{H}$, поэтому из (5.42)₂ имеем $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, и система уравнений для $\mu_0 \cdot \mathbf{H}$ получается такой же, как в вакууме. При постоянстве μ поперёк поля векторное произведение $[\mathbf{H} \nabla \mu] = 0$ и, следовательно, $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_a \cdot \mathbf{j}$, поэтому система уравнений для \mathbf{B} получается такой же, как в неограниченной однородной среде.

Пусть заданное поле \mathbf{j} отличается чётной цилиндрической симметрией относительно оси Z системы r, φ, z . Векторные линии l_B магнитного поля такого тока в вакууме являются окружностями с общей осью по оси Z (см. рис. 1.18, а, б, рис. 5.9). Это позволило нам получить для расчёта такого поля простую формулу (5.26)₂. Замена вакуума средой, симметричной относительно оси Z , т. е. средой с проницаемостью $\mu = \mu(r, z)$, например кусочно-однородной средой с поверхностями раздела $r = f(z)$, $z = \text{const}$, $r = \text{const}$, очевидно, не вызывает нарушения симметрии поля. Поэтому

$$\mathbf{H} = \mathbf{1}_\varphi \cdot H_\varphi, \quad H_\varphi = I_S(r, z) / (2\pi \cdot r), \quad B_\varphi = \mu_0 \cdot \mu(r, z) \cdot I_S(r, z) / (2\pi \cdot r). \quad (5.55)$$

Допустим теперь, что $\mu = \mu(\varphi)$ (например, кусочно-однородная среда с поверхностями раздела в виде полуплоскостей $\varphi = \text{const}$). Векторные линии l_B в такой, несимметричной относительно оси Z среде, остаются окружностями с той же осью, а все сечения каждой векторной трубки одинаковы, и, следовательно, согласно (5.42)₂, (5.46)₂ значение $B = |\mathbf{B}|$ не зависит от φ . Поэтому из (5.55)₃ интегрированием по векторной линии l_B получаем

$$\begin{aligned} \frac{2\pi r}{\mu_0} \cdot B_\varphi(r, z) &= \int_S \mu(\varphi) \cdot (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}) = \int_0^r r \cdot j_z(r, z) \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) d\varphi dr = \\ &= 2\pi \cdot \mu_{\text{cp}} \int_0^r r \cdot j_z(r, z) dr = \mu_{\text{cp}} \int_S (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}), \quad \text{где} \quad \mu_{\text{cp}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (5.56)$$

– среднее по координатной линии l_φ значение функции $\mu(\varphi)$. Таким образом, аналогично (5.26), имеем

$$B(r, z) = \frac{\mu_0 \cdot \mu_{\text{cp}}}{2\pi \cdot r} \cdot I_S(r, z), \quad H(r, \varphi, z) = \frac{\mu_{\text{cp}}}{2\pi \cdot \mu(\varphi) \cdot r} \cdot I_S(r, z) \quad (5.57)$$

(см. [Альпин, 1971], с. 298 – 300).

В соответствии с (5.57) следует в (5.27') и (5.27'') вместо μ_0 подставить произведение $\mu_{\text{cp}} \cdot \mu_0$, а при переходе от \mathbf{B} к \mathbf{H} – $\mu_{\text{cp}} / \mu(\varphi)$.

III. Взаимодействие токов

В неограниченной однородной магнитной среде элемент линейного тока $I \cdot d\mathbf{l}$ согласно (5.53), (5.53') создаёт в точке a магнитное поле

$$d\mathbf{B}(a) = \frac{\mu_0 \cdot \mu \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{[d\mathbf{l} \mathbf{L}_{qa}]}{L_{qa}^3}, \quad (5.58)$$

где q – средняя точка отрезка $d\mathbf{l}$.

Если $I_1 \cdot d\mathbf{l}_1$ и $I_2 \cdot d\mathbf{l}_2$ – расположенные в неограниченной однородной магнитной среде элементы токов I_1 и I_2 , то согласно (5.1) магнитное поле, создаваемое элементом тока $I_1 \cdot d\mathbf{l}_1$ с центром в точке 1, действует на элемент тока $I_2 \cdot d\mathbf{l}_2$ с центром в точке 2 (рис. 5.11) с силой

$$\mathbf{F}_{12} = I_2 \cdot [d\mathbf{l}_2 \mathbf{B}_{12}], \quad (5.58')$$

где в соответствии с (5.58)

$$\mathbf{B}_{12} = \frac{\mu_0 \cdot \mu \cdot I_1}{4\pi \cdot L_{12}^3} \cdot [d\mathbf{l}_1 \mathbf{L}_{12}]. \quad (5.58'')$$

Следовательно,

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 \cdot \mu \cdot I_1 \cdot I_2}{4\pi \cdot L_{12}^3} \cdot [d\mathbf{l}_2 [d\mathbf{l}_1 \mathbf{L}_{12}]]. \quad (5.59)$$

Иначе можно сказать, что \mathbf{F}_{12} – сила, с которой элемент тока $I_1 \cdot d\mathbf{l}_1$ действует на элемент тока $I_2 \cdot d\mathbf{l}_2$.

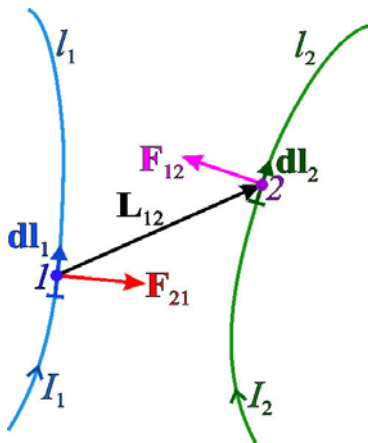


Рис. 5.11.

Взаимодействие
линейных токов

При произвольном взаимном расположении элементов dl_1 и dl_2 $F_{21} \neq F_{12}$. Если, например, точка 2 лежит на прямой l_1 , на которой расположен элемент dl_1 , то $[d\mathbf{l}_1 \mathbf{L}_{12}] = 0$ и, следовательно, $\mathbf{F}_{12} = 0$; что же касается силы \mathbf{F}_{21} , то, если элемент dl_2 не коллинеарен элементу dl_1 , она отлична от нуля. Но взаимодействие, отдельно взятых участков токовых цепей является нереальным. Что же касается (замкнутых) токовых цепей, взятых в целом, то силы взаимодействия, получающиеся из формул (5.1) и (5.58) интегрированием, удовлетворяют равенству $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$.

Легко видеть, что силы взаимодействия линейных токов, расположенных в одной плоскости, лежат в этой плоскости. Коллинеарные токи взаимно притягиваются, если они параллельны, и отталкиваются, если они антипараллельны.

От выражений для сил взаимодействия линейных токов нетрудно перейти к выражениям для сил взаимодействия объёмных и поверхностных токов.

В общем случае, когда магнитная среда не всюду однородна, формула (5.59) не справедлива, так как в этом случае не верны выражения (5.58) и (5.58'') для $d\mathbf{B}(a)$ и \mathbf{B}_{12} .

IV. Замечания

К сказанному о влиянии магнитной среды добавим следующее.

1. Из изложенного в третьей главе и в § 4 и § 5 этой главы следует, что влияние магнитной среды на магнитное поле, создаваемое токами или магнитами в какой-либо области V , даже при условии, что в ней нет ни токов,

ни магнитов и среда в ней однородна ($\nabla\mu=0$ или даже $\mu=1$), в общем случае может быть очень сложным. Оно может иметь различный характер в зависимости от характера распределения токов, магнитов и среды в пространстве (вне области V). Тем более это верно для области V , в которой находятся токи или магниты.

2. Следует помнить, что в общем случае (когда не всюду $\nabla\mu=0$) поле $\mathbf{H}=\mathbf{B}/\mu_0\cdot\mu$ (вне магнитов, при $\mathbf{J}^0=0$) так же, как поле \mathbf{B} зависит от магнитной среды, от функции $\mu(q)$, определяющей распределение проницаемости среды в пространстве. Нельзя считать, что поле \mathbf{H} в присутствии магнитной среды (не всюду однородной) – это магнитное поле, которое мы имели бы в отсутствии этой среды, т. е. поле, определяемое выражениями для \mathbf{H} , полученными во второй главе и в § 2, § 3 этой главы.

3. Поле \mathbf{H} не зависит от магнитной проницаемости среды μ только в исключительном случае неограниченной однородной среды, т. е. когда во всех точках пространства (включая области, занятые магнитами, токами, электромагнитами, с помощью которых создают магнитное поле) проницаемость μ имеет одно и то же значение.

4. На достаточно больших расстояниях от мест нарушения однородности среды (а также в некоторых более сложных частных случаях) можно практически применять для определения поля формулы, справедливые для неограниченной однородной среды (или несущественно отличающиеся от них). Но при экспериментальном изучении поля даже в таких условиях может возникнуть осложнение в связи с нарушением однородности среды применяемой аппаратурой.

5. Сравнивая (3.40)₂ и (5.59), видим, что в неограниченной однородной среде магнитные массы аналогично электрическим зарядам взаимодействуют с силой, обратно пропорциональной проницаемости среды, а электрические токи взаимодействуют с силой, прямопропорциональной μ . Между тем в соответствии с изложенным в этой главе фактически взаимодействие магнитных полюсов должно свестись к взаимодействию молекулярных токов, носителями которых являются магниты. Аналогичное несоответствие замечаем при сравнении выражений для поля \mathbf{H} , создаваемого токами и магнитными массами в неограниченной однородной среде. Согласно (3.38)₂ поле \mathbf{H} , создаваемое магнитными массами, обратно пропорционально μ , а в соответствии с (5.53) поле \mathbf{H} , создаваемое токами в неограниченной однородной среде, не зависит от μ . Эти несоответствия связаны с устаревшей, но принятой по традиции редакцией формулы (3.18')₂, выражающей зависимость намагниченности от магнитного поля. Отклоняясь от этой традиции, следует считать временную намагниченность пропорциональной вектору \mathbf{B} , а не \mathbf{H} .

6. Удобно положить вместо (3.18')₂

$$\mathbf{J}=\alpha'\cdot\mathbf{B}+\mathbf{J}^\Lambda \quad (5.60)$$

где $\alpha'=\alpha/\mu_a=4\pi\cdot\alpha_H/(\mu_0\cdot\mu)$, а \mathbf{J}^Λ – значение \mathbf{J} при $\mathbf{B}=0$ (ср. [Тамм, 1976], с. 333 – 335). В соответствии с (3.15)₂ имеем вместо (3.19'')₂

$$\mathbf{B}=\mu_0\cdot(\mathbf{H}+\boldsymbol{\alpha}'\cdot\mathbf{B}+\mathbf{J}^\Delta), \text{ откуда } \mathbf{B}=\mu_a\cdot(\mathbf{H}+\mathbf{J}^\Delta). \quad (5.61)$$

Различие между формулами (3.19'')₂ и (5.61)₂ исчезает при $\mathbf{J}^\Delta=\mathbf{J}^0=0$, следовательно, оно касается только поля внутри тел постоянных магнитов. Для пространства вне этих тел остаются справедливыми формулы, полученные в третьей главе.

В связи с переходом от (3.19'')₂ к (5.61)₂ можно видоизменить формулы (3.40)₂ и (3.38)₂ так, чтобы устранить несоответствия, отмеченные в замечании 5.

Действительно, из (5.61)₂ имеем для однородной среды

$$\operatorname{div} \mathbf{H}=-\operatorname{div} \mathbf{J}^\Delta, \text{ т. е. } \operatorname{div} \mathbf{H}=\delta^\Delta, \text{ где } \delta^\Delta=-\operatorname{div} \mathbf{J}^\Delta \quad (5.62)$$

аналогично (3.12')₁. Сравнивая (5.62)₂ с (3.21')₂ (при $\nabla\mu=0$), видим, что

$$\delta^0=\mu\cdot\delta^\Delta, \quad m^0=\mu\cdot m^\Delta, \quad \sigma^0=\mu\cdot\sigma^\Delta, \dots, \quad (5.63)$$

где δ^Δ , m^Δ , σ^Δ , ... – величины, аналогичные δ^0 , m^0 , σ^0 , Подставляя (5.63) в (3.38)₂ и (3.40)₂, получаем

$$\mathbf{H}(a)=m_q^\Delta\cdot\mathbf{L}_{qa}/(4\pi\cdot L_{qa}^3), \quad \mathbf{F}_{qa}=\mu_0\cdot\mu\cdot m_q^\Delta\cdot m_a^\Delta\cdot\mathbf{L}_{qa}/(4\pi\cdot L_{qa}^3). \quad (5.64)$$

Согласно этим формулам в неограниченной однородной магнитной среде поле \mathbf{H} не зависит от μ , а сила взаимодействия точечных масс пропорциональна μ , как и должно быть по аналогии с (5.53) и (5.59).

Список литературы

1. Альпин Л. М. Теория поля. - М.: Недра, 1966.
2. Альпин Л. М. Практические работы по теории поля. - М.: Недра, 1971.
3. Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. - М.: Недра, 1985.
4. Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике (электронная версия). Часть I. Введение. Глава первая "Поле", 2019. - 104 с.
http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol1_2019.pdf;
<https://elibrary.ru/item.asp?id=41710031>.
5. Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике (электронная версия). Часть II. Глава вторая "Статическое поле в вакууме". Глава третья "Статическое поле в присутствии среды", 2020. - 111 с.
http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol2_2019.pdf;
6. Амензаде Ю. А. Теория упругости. - М.: Высшая школа, 1976.
7. Бурсиан В. Р. Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке. - Л.: Недра, 1972.
8. Гурвич И. И., Боганик Г. Н. Сейсмическая разведка. - М.: Недра, 1980.
9. Джексон Дж. Классическая электродинамика. - М.: Мир, 1965.
10. Заборовский А. И. Переменные электромагнитные поля в электроразведке. - М.: Изд-во МГУ, 1960.
11. Иваненко Д., Соколов А. Классическая теория поля. - М.: Гостехиздат, 1949.

12. *Каринский А. Д.* Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Статические поля. Стационарное электрическое поле. Учебное пособие (Практикум), 2014, 105 с. [Электронный ресурс]:-М.: МГРИ http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT_ID=2657; http://magnetometry.ru/files/Karinskiy_lab_2014.pdf; <http://www.geokniga.org/books/6823>).
13. *Каринский А. Д.* Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебное пособие (Лекции), 2014, 203 с. [Электронный ресурс/Текст]: http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT_ID=2656; http://magnetometry.ru/files/Karinskiy Lec_2014.pdf; <http://www.geokniga.org/books/6822>.
14. *Каринский А. Д.* Теория поля. Дополнительные главы: учебное пособие для специализации "сейсморазведка", 2018, 104 с., М.: МГРИ-РГГРУ, [Электронный ресурс/Текст]: http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT_ID=4823; http://magnetometry.ru/files/Karinskiy uch_2018.pdf.
15. *Каринский А. Д.* Электромагнитное поле в моделях электрически анизотропной среды. М.: ГЕОС, 2018, 184 с. [Электронный ресурс/Текст]: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36951933>; http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT_ID=5326.
16. *Кауфман А. А.* Введение в теорию геофизических методов. Часть 1. Гравитационные, электрические и магнитные поля. - М.: Недра, 1997, 520 с.
17. *Корн Г. и Корн Е.* Справочник по математике /изд. 2-е. - М.: Наука, 1970.
18. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. - М.: Наука, 1965.
19. *Марков Г. Т., Чаплин А. Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. - М.: Радио и связь, 1983.
20. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. - М.: Изд-во Иностранная литература, 1958.
21. *Никольский В. В.* Электродинамика и распространение радиоволн. - М.: Наука, 1973.
22. *Овчинников И. К.* Теория поля. - М.: Недра, 1979.
23. *Саваренский Е. Ф.* Сейсмические волны. - М.: Недра, 1972.
24. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. - М.: Гостехиздат, 1946.
25. *Стрэттон Дж. А.* Теория электромагнетизма. - М.: Гостехиздат, 1948.
26. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. - М.: Наука, 1976.
27. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977.